بسم الله الرحمن الرحيم

مدرّس المقرّر : د. محمّد الشيخ / تاريخ المحاضرة : 23/11/2016

الفصل الثالث : " المتتاليات والمتسلسلات العقديّة "

مبرهنة (١):

لتكن $\sum_0^\infty z_n$ ، $\sum_0^\infty w_n$ متسلسلتين متقاربتين ، عندئذٍ فإنَّ متسلسلة المجموع لهما: $\sum_0^\infty (z_n + w_n)$ متقاربة ، وعندئذٍ يكون:

$$\sum_0^\infty (z_n + w_n) = \sum_0^\infty z_n + \sum_0^\infty w_n$$

البرهان:

بفرض $\sum_0^\infty z_n$ ، $\sum_0^\infty w_n$ متسلسلتين متقاربتين ، عندئذٍ فإنَّ متتاليتا المجاميع الجزئية لهما:

$$\begin{cases} s_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n \to s = \sum_0^\infty z_n \\ T_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n \to T = \sum_0^\infty w_n \end{cases}$$

وإنَّ متتالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة المجموع: $\sum_0^\infty (z_n + w_n)$ ، هي:

$$\sigma_n = (z_0 + w_0) + (z_1 + w_1) + \cdots + (z_n + w_n)$$

$$\overset{\text{(+)تبديلي و تجميعي}}{\cong} (z_0 + z_1 + \cdots + z_n) + (w_0 + w_1 + \cdots + w_n) = s_n + T_n \underbrace{\to}_{\substack{T_n \to T \\ S_n \to s}} s + T$$

وأكثر من ذلك ، إنَّ:

$$\sum_{n=0}^\infty (z_n + w_n) = s + T = \sum_0^\infty z_n + \sum_0^\infty w_n$$

* إذا كانت إحدى المتسلسلتين متباعدة والأخرى متقاربة ، فمجموعهما سيكون متباعد .

* إن العكس للمبرهنة غير صحيح ، لأنَّه بالإمكان إيجاد متسلسلتين متباعدتين ، لكنَّ مجموعهما متقارب.

مثال على ذلك:

$$\underbrace{\sum(-1)^{n+1}}_{\text{متباعدة}}+\underbrace{\sum(-1)^{n}}_{\text{متباعدة}}=\sum[(-1)^{n+1}+(-1)^{n}]=\underbrace{\sum 0}_{\text{متقاربة}}\to 0$$

مبرهنة (٢):

بفرض $\sum z_n$ متقاربة ، و $\lambda\in\mathbb{C}$ عندئذٍ فإنَّ: $\sum(\lambda.z_n)$ متقاربة ، وإنَّ:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda.z_n)=\lambda.\sum_{n=0}^{\infty}z_n$$

مبرهنة (٣):

تكون المتسلسلة العقديّة $\sum z_n$ متقاربة ، إذا وفقط إذا تحقق الشرط :

$$\forall\,\varepsilon>0\,,\exists n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ ,\ \ \forall m>n\geq n_0\ :\ |z_{n+1}+z_{n+2}+\cdots+z_m|<\varepsilon$$

الإثبات (تمَّ شفهياً):

$\Leftarrow$ بفرض $\sum z_n$ متقاربة فإنَّ $\{s_n\}$ متتالية المجاميع الجزئيّة لها ستكون متقاربة $\Leftarrow$ $\{s_n\}$ كوشية:

$$\Rightarrow\forall\,\varepsilon>0\ ,\ \ \exists N(\varepsilon)>0\ ,\ \ \forall m,n\geq N_\varepsilon\ :\ |s_m-s_n|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow\ \ |z_{n+1}+\cdots+z_m|<\varepsilon$$

$\Rightarrow$: نمشي بالعكس فنحصل على نفس النتيجة إلّا أنّه يجب التنويه عندما نقول إنّ $\{s_n\}$ كوشيّة فهي متقاربة ، ويجب التنويه إلى أنّ الفضاء $\mathbb{C}$ تام .

مبرهنة (٤):

إنَّ المتسلسلة $\sum(x_n+i.y_n)$ تكون متقاربة ومجموعها s إذا وفقط إذا كان:

كل من $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متقاربتين ، ومجموعهما $Re\ s$ و $Im\ s$ على التوالي .

لأنَّ:

$$s_n=(x_0+i.y_0)+(x_1+i.y_1)+\cdots+(x_n+i.y_n)$$
$$=(x_0+x_1+\cdots+x_n)+i.(y_0+y_1+\cdots+y_n)$$

مثال:

ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات التالية :

$$\mathbf{1)}\quad\sum\left(\frac{1}{n}+i.\frac{n}{n^3+1}\right)$$

نلاحظ أنَّ متسلسلة الأجزاء الحقيقية لها $\sum\frac{1}{n}$ متباعدة ومنه المتسلسلة متباعدة .

$$2)\quad \sum\left(\frac{1}{n^2}+i.\frac{n}{n^3+1}\right)$$

نلاحظ أنَّ متسلسلة الأجزاء الحقيقية لها $\sum\frac{1}{n^2}$ متقاربة ، وكذلك متسلسلة الأجزاء التخيلية لها $\sum\frac{n}{n^3+1}$ ، متقاربة ، وبالتالي فالمتسلسلة المدروسة متقاربة.

$$3)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+i.\frac{1}{n!}\right)$$ سؤال دورة

متسلسلة الأجزاء الحقيقية هي $\sum\frac{1}{2^{n+1}}$ متقاربة لأنّها هندسيّة أساسها : $|1|>r=\frac{1}{2}$ ، ومجموعها:

$$s=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

وإنَّ متسلسلة الأجزاء التخيّليّة لها متقاربة أيضاً ، حسب منشور ماكلوران يمكن أن نكتب :

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad ;\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow e=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

وبالتالي متسلسلة الأجزاء التخيلية متقاربة ومجموعها هو e ، وحيث إنه:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+i.\frac{1}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}+i.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+i.e$$

أي إنَّ المتسلسلة المدروسة متقاربة ومجموعها يساوي : $\boxed{1+i.e}$

التقارب بالإطلاق :

نقول عن المتسلسلة العقديّة $\sum z_n$ ، إنّها متقاربة بإطلاق إذا وفقط إذا كانت متسلسلة الطويلات لها متقاربة أي : $\sum|z_n|$ متقاربة $\Leftrightarrow$ $\sum z_n$ متقاربة بإطلاق .

مبرهنة (١):

كلّ متقاربة بإطلاق متقاربة ، أي: $\sum z_n$ متقاربة بإطلاق $\Leftarrow$ $\sum z_n$ متقاربة .

الإثبات:

$\sum|z_n|$ متقاربة بإطلاق $\Leftarrow$ $\sum|z_n|$ متقاربة :

$$\Rightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \,, \exists N(\varepsilon) \geq 0 \,, m, n \geq N : \ \big||z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \cdots + |z_m|\big| \leq |z_{n+1}| + \cdots + |z_m| < \varepsilon$$

$\Leftarrow$ $\sum z_n$ متقاربة.

مبرهنة (٢):

$\sum z_n$ متقاربة بالاطلاق $\Leftrightarrow$ المتتالية : $\sigma_n = |z_0| + |z_1| + \cdots + |z_n|$ محدودة.

البرهان:

تمَّ شفهيّاً.

ملاحظة:

إنَّ العكس للمبرهنة الأولى غير صحيح بالضرورة ، أي: $\sum z_n$ متقاربة $\not\Rightarrow$ $\sum z_n$ متقاربة بالاطلاق.

وهذا يعني وجود متسلسلات متقاربة لكنّها ليست متقاربة بالاطلاق ، ومثل هذه المتسلسلات ندعوها متسلسلات متقاربة شرطيّاً.

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{i^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ \text{متقاربة}$$

ومنه فإنَّ المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2} \ \text{متقاربة باطلاق فهي متقاربة}$$

مثال ثانٍ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$$

الحل:

$$\sum \left|\frac{i^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n} \ \text{متباعدة}$$

ومنه $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ غير متقاربة بإطلاق ، ولدينا:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(cis\frac{\pi}{2}\right)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cis\frac{\pi}{2}}{n}$$

$$=(0+i)+\left(-\frac{1}{2}+i.0\right)+\left(0-\frac{i}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+i.0\right)+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}+i.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

نلاحظ أنَّ متسلسلة الأجزاء الحقيقية للمتسلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ هي $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$ ،

وهي متقاربة حسب معيار لايبنز،حيث:

إنّها متناوبة ، و متتالية القيمة المطلقة للحد العام لها هي: $\left\{\left|\frac{(-1)^n}{2n}\right|\right\}=\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ ، وهي متناقصة ،

وأيضاً إنَّ: $\left|\frac{(-1)^n}{2n}\right|=\frac{1}{2n}\to 0$.

ونلاحظ أنَّ متسلسلة الأجزاء التخيلية للمتسلسلة: $\sum\frac{i^n}{n}$ هي $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ ، وهي متقاربة أيضاً حسب لايبنز ، وبالنتيجة نجد أنَّ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ متقاربة ((ووجدنا سابقاً أنَها غير متقاربة بالإطلاق) ، فهي متقاربة شرطياً.

ملاحظة:

$\sum z_n$ متقاربة $\Leftarrow$ التبديل بين عددٍ غير منتهٍ ، وكذلك التجميع الكيفي لن يؤثر على طبيعتها (من حيث التباعد والتقارب).

تمرين ((وظيفة):

أثبت أنَّ المتسلسلة:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{i^n}{2n}$$

متقاربة شرطيّاً ، واستفد من كون:

$$\ln n<n\quad;\quad\forall n\geq 2$$

انتهت المحاضرة ..

☺ لا تنسونا من صالح دعواتكم ☺

إعداد: خالد الشعار