المحاضرة -7- :

من المحاضرات السابقة:

1- حلول متعددة:

وكان المثال:

$5x_1 + x_2 \le 400$

$4x_1 + 8x_2 \le 480$

$x_1, x_2 \ge 0$

2- حالة الحل غير محدد : $F = 10x_1 + 23x_2 \to Max$

وكان المثال $3x_1 + 5x_2 \ge 75 \to s_1, y_1$

$x_2 \le 12 \to t_1$

s_1 زائد - y_1 صناعي ، t_1 خامل

$x_1, x_2 \ge 0$

لنطبق طريقة simplex عليها :2

$F = 10x_1 + 23x_2 - My_1 \to Max$

$3x_1 + 5x_2 - s_1 + y_1 = 75$

$x_2 + t_1 = 12$

$x_1, x_2, s_1, y_1, t_1 \ge 0$

	x_1	x_2	s_1	y_1	t_1	R.h
y_1	3	5	-1	1	0	75
t_1	0	1	0	0	1	12
$-F$	-10	-23	0	+M	1	0
F	-10-3M	-23-5M	M	0	1	-75M

y_1	3	0	-1	1	-5	15
x_2	0	1	0	0	1	12
F	$-10-3M$	0	M	0	$+23+5M$	$276+15M$
x_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	5
x_2	0	1	$\frac{0}{3}$	$\frac{0}{3}$	1	12
F	0	0	$-\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}+M$	$\frac{19}{3}$	326

في حال عدم إمكانية تحديد سطر الدوران فنحن أمام حالة

حل غير محدود $\Rightarrow$ لا يوجد الحل.

2- حالة الحل غير موجود: وكان المثال

$$F = 20x_1 + 15x_2 - My_1 \to max$$

$$5x_1 + 10x_2 + t_1 = 25$$

$$5x_1 + 10x_2 - S_1 + y_1 = 50$$

$$x_1, x_2, y_1, t_1, S_1 \geq 0$$

	x_1	x_2	S_1	t_1	y_1	Rh
t_1	5	10	0	1	0	25
y_1	5	10	-1	0	1	50
$-F$	-20	-15	0	0	M	0
$-My_1+F$ F	$-20-5M$	$-15-10M$	M	0	0	$-50M$
x_2	$1/2$	1	0	$1/10$	0	$25/10$
y_1	0	0	-1	-1	1	25
F	$-25/2$	0	M	$\frac{15+10M}{10}$	0	$\frac{375}{10}-25M$

(3) عدم وجود حل

x_1	1	2	0	1/5	0	5
y_1	0	6	-1	-1	1	25
F	0	25	M	5/2	0	$\boxed{100-\frac{625M}{2}}$

لم نعد نستطيع تحديد عمود الدوران فنحن أمام حالة "لا يوجد حل".

عندما لا تنتهي M في قيمة دالة الهدف بعد توقف الخوارزمية فنحن أمام حالة الحل غير موجود.

تمرين:

$F = 12x_1 + 8x_2 - MS_1 \rightarrow Max$

$4x_1 + 9x_2 + y_1 = 1800$

$3x_1 + 2x_2 - y_2 + S_1 = 100$

$x_1, x_2, y_1, y_2, S_1 \geq 0$

	x_1	x_2	y_1	y_2	S	R.h
y_1	0	9	1	0	0	1800
S	3	2	0	-1	1	400
-F	-12	-8	0	0	M	0
F	-12-3M	-8-2M	0	M	0	-400M
y_1	0	19/4	1	4/3	4/3	3800/3
x_1	1	2/3	0	-1/3	1/3	400/3
F	0	0	0	-4	(12+3M)/3	1600
y_2	0	19/4	3/4	1	1	950
x_1	1	9/4	1/4	0	2/3	450
F	0	19	3	0	$\frac{24+3M}{2}$	5400

حالة الحل المتحل أو (الدوران) :

يظهر صفر في الطرف الثاني (مثلاً في مثالنا السابق بدل 950 أو 450) فنكون أمام حالة حل متحل ونفسر هذا الصفر هو شرط الدوران ونحدد توجيه عمود الدوران.

المحاضرة السابعة :

وجدنا الحل للبرنامج الخطي $x_i \; ; \; i=1:n$

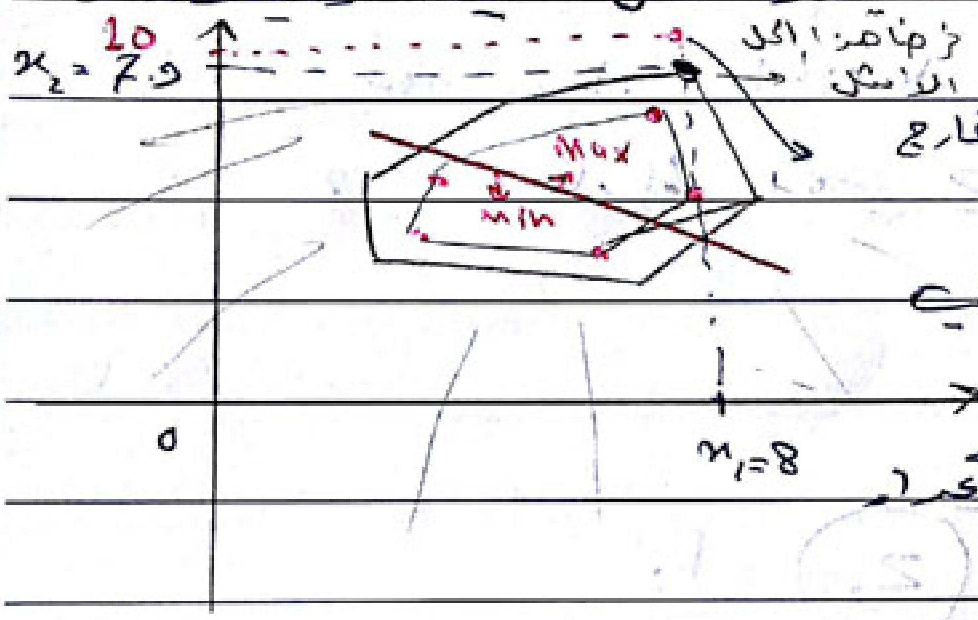
$x_i \geq 0 \; ; \; x_i \in \mathbb{R} \; , \; x_i \in \mathbb{Q}^+$

إن هذا الحل ليس مثالي دوماً. أي ممكن أن أحصل

على الناتج على قيم

$x_1 = 1.23 \simeq 1 \; , \; x_2 = 9.57 \simeq 10 \; , \; x_3 = 8.6 \simeq 9$

يمكنني أن أقرب لكن هذا الحل ليس دقيق علماً



بالتالي التقريب ليس مثالي

نبحث عن الحلول المنطبقة على النقاط الحمراء التي هي أعداد صحيحة

بالتالي أحصل على منطقة حل جديدة جميع رؤوسها أعداد صحيحة.

$$\left.\begin{array}{l} F = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \to Max \\ a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m \\ \text{ويحقق الشرط :} \\ x_i \geq 0 \; ; \; i=1:n \; , \; x_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \end{array}\right\} Z$$

صحيح $i=1:n$

لدي طريقتين : 1 - طريقة القطع

يكون لدي مستوي أقطع به و أظل أقطع

حتى الوصول إلى نقطة صحيحة .

لو لدي فضاء $\mathbb{R}^3$ فما فوق يصبح لدي

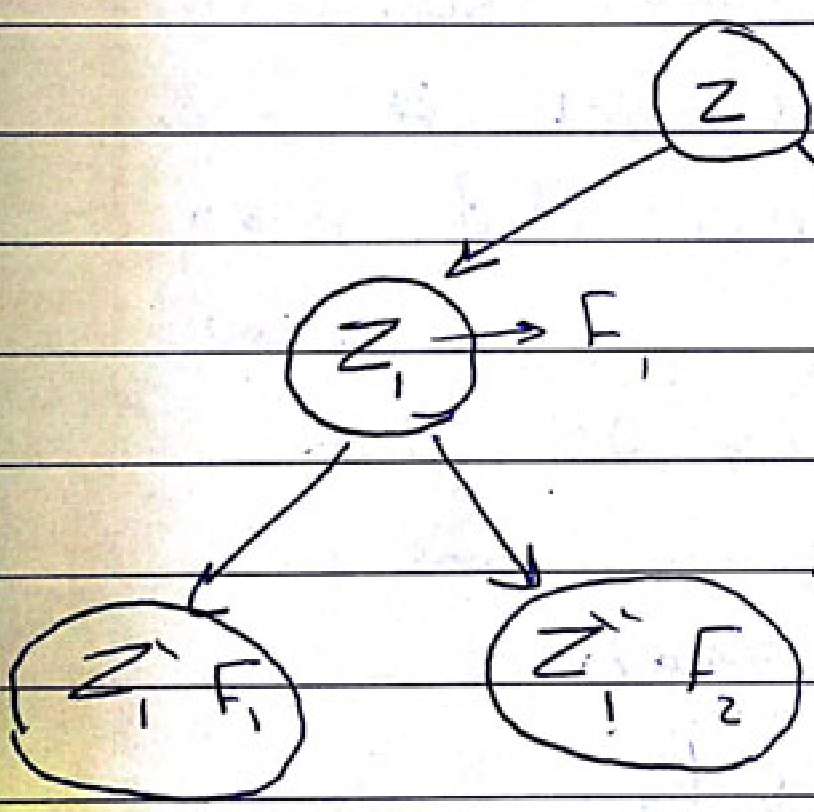
مستوي للقطع .

مع القطع تتغير لدي حالة الهدف من أحد

رؤوس المضلع و ننتقل خطوة خطوة .

حتى نصل إلى حل تكون جميع قيمه حل أمثل

2 - حل المسألة Z (طريقة تفريع البرنامج الخطي



احتمال أن يكون Z_1 و Z_2

أحدهما خطأ فنأخذ الأفضل

و نفرعه .

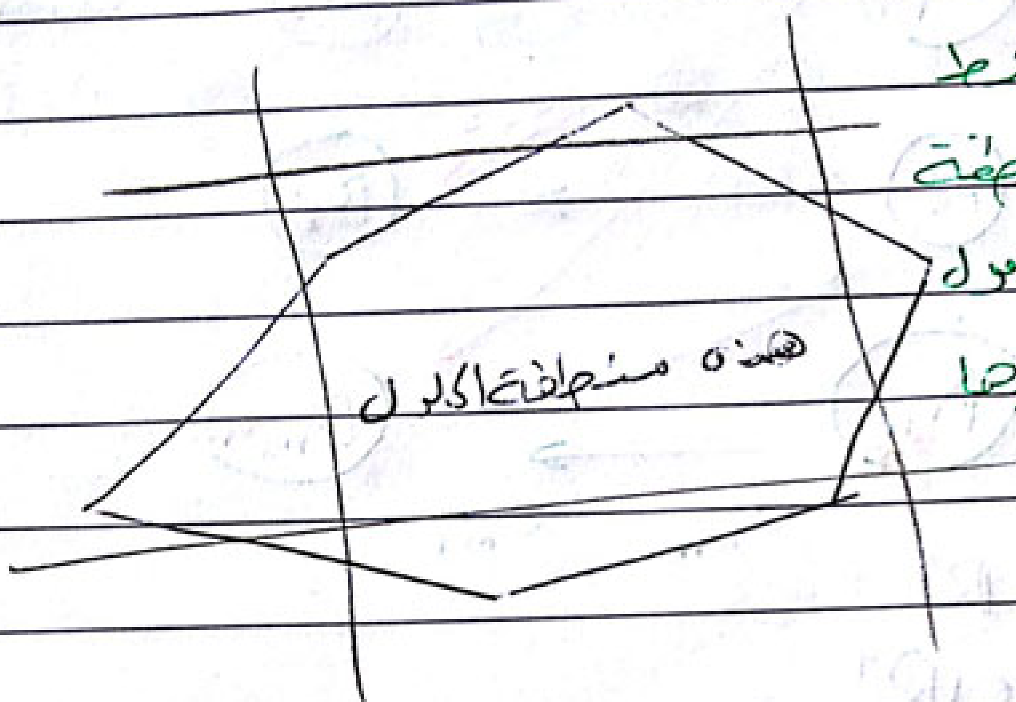
ممكن الاثنين صح فنأخذ الحل الأفضل .

ممكن أحدهما خطأ و الآخر صح فنأخذ الصحيح .

ثم بالنسبة لـ $Z'_1 F_1$ و $Z''_1 F_2$

نناقش نفس المناقشة السابقة

مبدؤها هندسياً:



كلّما أضفنا شرط
نخرج من منطقة
الحلول حتى الوصول
للمنطقة التي أريدها

مسألة النقل: Transport problem

فيها ثلاث عناصر

1: مصدرين لديهم الرغبة في تصدير جميع المواد

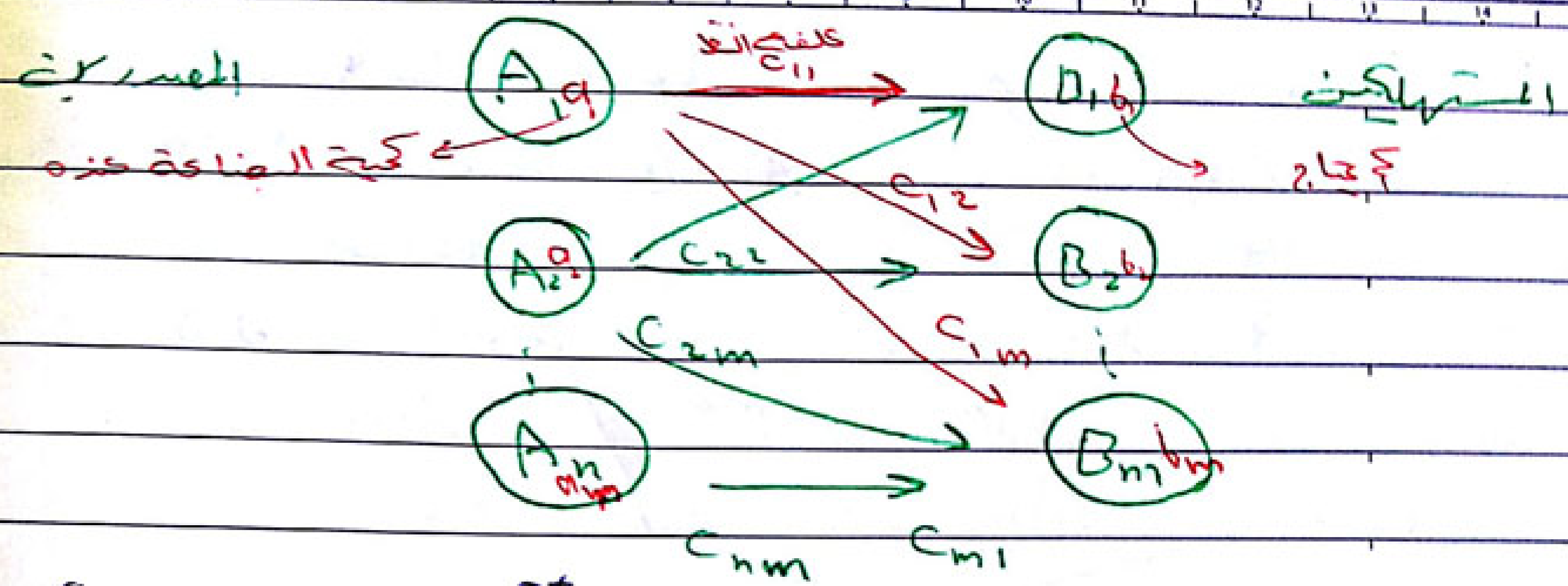
2- مستهلكين لديهم الرغبة بالحصول على جميع متطلباتهم.

3. كلفة النقل بين مراكز التصدير ومراكز الاستهلاك

شرح: كلّما ازدادت نفقات النقل زاد العبء على المستهلك إذاً المستهلك يسعى لأن تكون كلفة النقل أقل ما يمكن

4- الهدف كلفة النقل أقل ما يمكن

«الهدف الأساسي منهجية تحل مثالية»



$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$

$b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}^+$

$C_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1:m$, $j = 1:m$

المستهلكين / المصدرين	B_1	B_2	--	B_m	الاحتياطي
A_1	x_{11} (c_{11})	x_{12} (c_{12})		x_{1m} (c_{1m})	a_1
A_2	x_{21} (c_{21})	x_{22} (c_{22})		x_{2m} (c_{2m})	a_2
$\vdots$					
A_n	x_{n1} (c_{n1})	x_{n2} (c_{n2})		x_{nm} (c_{nm})	a_n
الطلب	b_1	b_2	.	b_m	$\sum_{j=1}^{m} b_j$ \ $\sum_{i=1}^{n} a_i$

سنميز ثلاث حالات

I) $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

المسألة مغلقة (حالة مثالية هي التي سنقابلها)

II) $\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j$

مسألة مفتوحة (حالة احتكار)

(حالة سيئة)

مثلاً مطلوب 100 قطعة ومعنا 80 قطعة

كلها زدنا المسألة مغلقة (ارتفاع بالأسعار)

III) $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sum_{j=1}^{m} b_j$

الموجودات أكثر من المطلوب. المسائل مفتوحة كلها

نردها المغلقة. (حالة انخفاض بالأسعار)

عدد المجاهيل هو $m \times n$ لازم يطلعوا أقل من $m+n$

نحسب بالزبيب و الباقي أصفار.

كيف نحسب عدد المجاهيل.

أ- نضع هدف المسألة ثم نركب برنامج خطي.

هدف المسائل ليكون

$$Z = C_{11}\boxed{x_{11}} + C_{12}x_{12} + \dots + C_{nm}x_{nm} \to Min$$

← التكلفة

كمية البضاعة

المجاهيل

جدول في جزء بعد زوج أصفار

٢- لدي رغبة مصدرين بدي حققها

المصدرين كل واحد عنده بضاعة بدو يخلص منها

$$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1m} \leq a_1$$

n معادلة متعلقة فيها

I

بخزن معادلة لا هنا ←

$$x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nm} \leq a_n$$

بجمع الطرفين نحصل على معادلة

$$x_{11} + \dots + x_{nm} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \quad *$$

إذن * هي $(n+1)$ معادلة مرتبطة خطياً
نزيل معادلة من I فنحصل على n معادلة
مستقلة خطياً.

$$x_{11} + x_{21} \cdots + x_{n1} \leq b_1$$
$$\vdots$$
$$x_{1n} + x_{2m} \cdots + x_{mn} \leq b_m$$

m معادلة مستقلة خطياً II

$$x_{11} + \cdots + x_{mn} \leq \sum_{j=1}^{n} b_j \quad **$$

إذن ** و II هي $m+1$ مرتبطة خطياً
نحذف معادلة من II فنحصل على m معادلة
مستقلة خطياً.

كل المعادلات السابقة عددها $m+n$ معادلة
~~مجم~~ مرتبطة خطياً
لأنه يوجد معادلتين تعطي نفس الـ *
و ** بالتالي نحذف واحدة منها نحصل على
$m+n-1$ معادلة مستقلة خطياً
بالتالي يجب أن يكون عدد الخلايا المشغولة
$m+n-1$

المحاضرة 8 : بالاستعانة بنفس الجدول الأخير من المحاضرة السابقة،

$F = c_{11} x_{11} + \dots + c_{mn} x_{mn} \to Min$

$x_{11} + \dots + x_{1n} \leq a_1$

$\vdots$

$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} \leq b_1$

$\vdots$

$x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} \leq b_n$

$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1:m, j = 1:n$

عدد المعادلات هو $m+n-1$

عدد المجاهيل هو $m*n$

عدد المتباينات $(m*n) - [m+n-1]$

نميز ثلاث حالات :

I - $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

مسألة النقل مغلقة في هذه الحالة (الحالة مثالية المتوفرة يساوي الطلب).

ونسمي ذلك المسألة المغلقة.

II $\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$

مسألة النقل مفتوحة

حالة احتكار (لإعادتها لمسألة نقل مغلقة نضيف مركز توزيع وهمي بكلفة نقل إلى صفرا في التوزيع صفر وباحتياطي $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$

الحالة الثالثة: III $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

مسألة النقل مقترحة
(الموجودات أكبر من الطلب) لتقريرها لمسألة
نقل مغلقة نضيف مركز توزيع وهمي بكلفة
نقل أصفرية وحجم طلبية

$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$

هدف حل مسألة النقل المغلقة:

بما أن عدد المجاهيل الواجب حسابها $m+n-1$
فيكون عدد الخلايا المجهولة $m+n-1$
الخلية المشغولة يوضع فيها كمية نقل.
خوارزمية حل مسألة النقل.
1- نوجد توزيع أولي (~~...~~ خطة نقل أولية)
باستخدام إحدى الطرق التالية:

1. North West corner Method طريقة الزاوية الشمالية الغربية

2. Mini method value طريقة القيمة الدنيا.

3. Vogel Method طريقة فوجل.

بعد توزيع أولي ثم أطوره إلى توزيع مثالي
يلزم عدد الخلايا في الطرق السابقة $m+n-1$
ما بيطلع أكثر من $m+n-1$ لكن ممكن أقل.
إذا كان عدد الخلايا المشغولة أقل من $m+n-1$

تصبح الخلايا بهذه الخطة مجهولة التعريف (مهمة مساعدة) وفق الخطوة الحاضرة.

12) تطوير خطة النقل بحيث تصبح خطة نقل مثالية وذلك بتحقيق الشروط التالية:

i) $u_i + v_j = c_{ij}$

بالنسبة للخلايا المشغولة.

ii) $u_i + v_j \leq c_{ij}$

متغيرات ← متغيرات مرتبطة بها [?]

مرتبطة بـ [?] الاستهداف التدريجي

بالنسبة للخلايا الفارغة.

الخطة مثالية عند تحقق الشرطين i و ii

ملاحظة: إذا كانت الخطة غير مثالية عند ذلك توجد خلية فارغة لا تحقق الشرط الثاني.

ننشئ سلسلة انطلاقاً من هذه الخلية الفرعية بحيث يكون الانتقال إما وفق الأعمدة أو وفق الأسطر بحيث تكون هذه السلسلة أكثر ما يمكن.

وتكون بقية رؤوسها خلايا مشغولة.

وهكذا نتابع حتى نعود إلى الخلية التي بدأنا منها.

(بحيث تكون الرؤوس خلايا مشغولة).

نسميها سلسلة مغلقة لأن كل رأس منها مشغول لكن رؤوس هذه السلسلة عددها زوجي لأن خطوط الانتقال وفق أسطر وأعمدة فقط.

انطلاقاً من الخلية الغير مشغولة نضع إشارة +

بالتناوب انطلاقاً من الخلية الغير مشغولة.

نضع + - ... على جميع رؤوس الحلقة.

نأخذ القيمة الدنيا لقيم (محولات) الخلايا ~~المحمولة~~

المرفوعة بإشارة (-).

حيثما توجد إشارة + و نضيف هذه الكمية

و ″ ″ (-) عند نطرح ″

بذلك نكون قد حصلنا على توزيع جديد (حل نقل جديد)

نختبر هذه الخطة فيما إذا كانت مثالية أو لا

و ذلك باستخدام الحد الشرطين (i) و (ii)

سؤال: لو كان هناك أكثر من خلية غير محققة ب

نختار أحد الخلايا التي تحقق الشرط التالي:

$$\max\{u_i + v_j - c_{ij}\}$$

أي خلية مباشرة لكن الأفضل نطبق (لكي يكون أسرع

الحل الذي نحصل عليه باستخدام هذه الطريقة هو نفس

الحل الذي نحصل عليه باستخدام السمبلكس لكن

السمبلكس أطول.

مثال:

	B_1	B_2	B_3	B_4	الاحتياطي
A_1	1	2	-3	5	100
A_2	4	3	5	2	150
A_3	2	6	1	4	200
الطلب	75	75	125	75	450 / 350

ليكن لدينا مسألة النقل المعطاة بالجدول السابق الذي يبين كلفة النقل بين مراكز التوزيع ومراكز الاستهلاك وبين كلفة النقل بين كل مركزين مترافقين

أوجد خطة نقل مثالية (خطة نقل بأقل كلفة).

المسألة ليست مغلقة.

1- نضيف مركز استهلاك وهمي.

الزاوية الشمالية الغربية	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5 مركز الاستهلاك الوهمي	الاحتياطي
A_1	1	2	3	5	0	100
A_2	4	3	5	2	0	150
A_3	2	6	1	4	0	200
الطلب	75	75	125	75	100	450 / 450

نريد إيجاد خطة نقل ابتدائية.

سوف نحدد بالطرق الثلاث.

أ- طريقة الزاوية الشمالية الغربية

عدد الخلايا المجهولة يجب أن يكون $5 - 3 + 1 = 7$

هذه الزاوية الشمالية الغربية

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	الامكانيات
A_1	75^{1}	25^{2}	$-^{3}$	$-^{5}$	$-^{0}$	100
A_2	$-^{4}$	50^{3}	100^{5}	$-^{2}$	$-^{0}$	150
A_3	$-^{2}$	$-^{6}$	25^{1}	75^{4}	100^{0}	200
الطلبية	75	75	125	75	100	450

2- طريقة القيم الدنيا :

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	الامكانيات
A_1	75^{1}	25^{2}	$-^{3}$	$-^{5}$	$-^{0}$	100
A_2	$-^{4}$	50^{3}	$-^{5}$	75^{2}	25^{0}	150
A_3	$-^{2}$	$-^{6}$	125^{1}	$-^{4}$	75^{0}	200
الطلبية	75	75	125	75	100	450 / 450

1- نحدد القيم الدنيا في الأسطر والأعمدة

2- نحمّل الخلايا التي تحمل إشارتين أعظم قيمة ممكنة ثم الخلايا التي تحمل إشارة واحدة ثم نحمّل الخلايا المتبقية وبأخذ القيم الدنيا.

طريقة فوجل :

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	الطلبية
A_1	75^{1}	25^{2}	$-^{3}$	$-^{5}$	$-^{0}$	100
A_2	$-^{4}$	50^{3}	$-^{5}$	75^{2}	25^{0}	150
A_3	$-^{2}$	$-^{6}$	125^{1}	$-^{4}$	75^{0}	200
الطلبية	75	75	125	75	100	450 / 450

13

	Row	colum
كل سطر ناخذ أكبر قيمة ونطرح منها أصغر قيمة	5 - 1 = 4	4 - 1 = 3
	5 - 2 = 3	6 - 2 = 4
السطر الثالث أصغر قيمة فيه هي 1	$\boxed{6 - 1 = 5}$	5 - 1 = 4
		5 - 2 = 3

نطرح أدنى قيمة من أكبر قيمة في الأسطر والأعمدة
نختار القيمة العظمى في الأسطر والأعمدة ونفتش
سطر أو نختار عامود
نحل هذه الخلية ذات القيمة الدنيا أعظم قيمة ممكنة

	Row	colum
عندما تتساوى القيم مع بعضها نختار أي واحدة	$\boxed{5 - 1 = 4}$	4 - 1 = 3
	4 - 2 = 2	6 - 2 = 4
	6 - 2 = 4	5 - 2 = 3
	5 - 2 = 3	$\boxed{6 - 2 = 4}$
	6 - 2 = 4	5 - 2 = 3
	3 - 2 = 1	
	3 - 2 = 1	$\boxed{6 - 3 = 3}$
	6 - 4 = 2	5 - 2 = 3
ليس لها علاقة لأنها فقط خلايا	2	$\boxed{4 - 2 = 2}$
	4	

المحاضرة ~~[illegible]~~ 10 :

"من أول جدول"، سوف نرى بداية إذا كان الحل مثالي (الأمثلي) سوف أطرحه

عدد الحاصل يجب أن يكون لدي هو 7

	$v_1=1$	$v_2=2$	$v_3=4$	$v_4=7$	$v_5=3$	الاحتياطي
$u_1=0$	$75\ ^{1}$	$25\ ^{2}$	//// ^{3}	//// ^{5}	/// ^{0}	100
$u_2=1$	^{4}	$50\ ^{3}$	$100\ ^{5}$ −	+ //// ^{2}	/// ^{0}	150
$u_3=-3$	^{2}	^{6}	$25\ ^{1}$ +	− $75\ ^{4}$	$100\ ^{0}$	200
الطلبية	75	75	125	75	100	

$\min = \min\{100, 75\} = 75$

عدد الحاصل يجب أن يكون لدي هو 7 لكن هنا لدي 8

سنختار واحد افتراضي أضعه صفر

للخلايا المجهول $u_i + v_j = c_{ij}$

سوف نرى الآن الخلايا الغير محققة وهي:

$u_i + v_j \leq c_{ij}$

$0+4 \not\leq 3 \Rightarrow 0+4-3=1$

$0+7 \not\leq 5 \Rightarrow 7-5=2$

$0+3 \not\leq 0 \Rightarrow 3$

$1+7 \not\leq 2 \Rightarrow 1+7-2=6$

$1+3 \neq 0 \Rightarrow 1+3=4$

لو أخذت انو خلية لا تحقق لا مشكلة لكن ما آخذ تبع ال max

سأبدأ من الخلية تبع ال max وأبدأ منها

حقق أفضل حل أطول سلسلة

	$v_1=1$	$v_2=2$	$v_3=4$	$v_4=1$	$v_5=3$	الاحتياطي
$u_1=0$	75 [1]	25 − [2]	+ [3]	[5]	[0]	100
$u_2=1$	[4]	50 + [3]	25 − [5]	75 [2]	[0]	150
$u_3=-3$	[2]	[6]	100 [1]	[4]	100 [0]	200
الطلبية	75	75	125	75	100	

$\min\{25, 25\} = 25$

[illegible]

	$v_1=1$	$v_2=2$	$v_3=2$	$v_4=1$	$v_5=2$	
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	الاحتياطي
$u_1=0$ A_1	75 [1]	0 + [2]	− 25 [3]	[5]	[0]	100
$u_2=1$ A_2	[4]	75 − [3]	[5]	75 [2]	+ [0]	150
$u_3=-2$ A_3	[2]	[6]	+ 100 [1]	[4]	− 100 [0]	200
الطلبية	75	75	125	75	100	

$4-3=1$

$1+3=4$

$\min\{25, 75, 100\} = 25$

"اخترنا خلية ما غير محققة ورسمنا منها أطول سلسلة"

"يجب أن تكون الرؤوس خلايا مشغولة"

	$v_1=1$	$v_2=2$	$v_3=0$	$v_4=1$	$v_5=-1$	الاحتياطي
$u_1=0$	75 [1]	25 [2]	[3]	[5]	[0]	100
$u_2=1$	[4]	50 [3]	[5]	75 [2]	25 [0]	150
$u_3=1$	[2]	[6]	125 [1]	[4]	75 [0]	200
الطلب	75	75	125	75	100	

لأأشير الصفر لأنني حصلت على 7 خلايا.

ولدي صورتين أخذت واحد اختياري.

لا يجب كتابة الكلمة في الامتحان   كلفة النقل هي :

$F = 1*75 + 2*25 + 3*50 + 2*75 + 0*25 + 1*125 + 0*75$

$= 550$

"هذه القيمة ثابتة، ممكن أن يكون هناك طريقة أخرى

للحل لكنها صحيحة !!

سنأخذ الآن طريقة فوجل ونكمل:

$v_1=1$ $v_2=2$ $v_3=0$ $v_4=1$ $v_5=-1$

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	الاحتياطي
$u_1=0$ A_1	75 [1]	25 [2]	[3]	[5]	[0]	100
$u_2=1$ A_2	[4]	50 [3]	[5]	75 [2]	25 [0]	150
$u_3=1$ A_3	[2]	[6]	125 [1]	[4]	75 [0]	200
الطلب	75	75	125	75	100	

$F_1 = 1*75 + 2*25 + 3*50 + 2*75 + 1*125 + 0*75 + 25*0 = 550$

إن التوزيع مثالي

بعد ما وصلنا على الـ min

SABBAGH STATIONERY

$F = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \to \max$ المحاضرة 11:

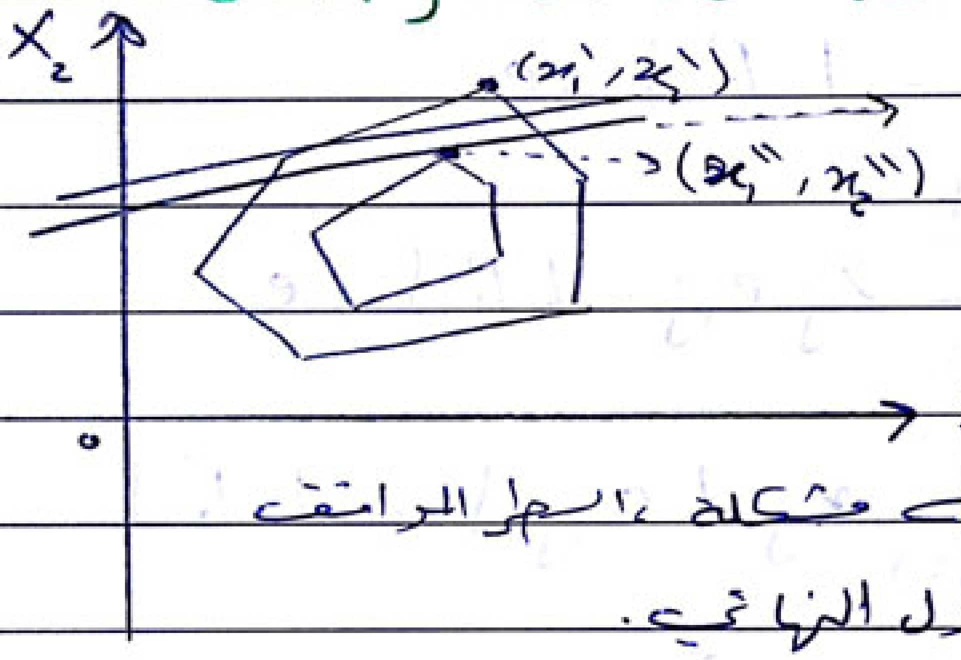
$a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \geq b_1$

$\vdots$

$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \geq b_m$

$x_i \geq 0, \ (2)$, x_i is integer

طريقة القواطع (طريقة غوري (Gomary Method



نقطع من منطقة الحلول

$x_1^=, x_2^= \in \mathbb{Z}$

سنأخذ الشرط الثاني فيه مشكلة، الحل الموافق لقيمة غير صحيحة في الجدول النهائي.

$a_{i1}' x_1 + \dots + a_{in}' x_n = b^*$

"لدينا الرمز $\lfloor \ \rfloor$ ويعني أول عدد صحيح تحتها وتسمى فلور، مثال:

$\lfloor 5.3 \rfloor = 5$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$; $\lfloor -4\frac{1}{3} \rfloor = -5$

"ولدينا الرمز $\lceil \ \rceil$ ويعني أول عدد صحيح فوقها وتسمى سيلنغ، مثال:

$\lceil 5.3 \rceil = 6$, $\lceil 3 \rceil = 3$, $\lceil -4\frac{1}{3} \rceil = -4$

$M \in \mathbb{R}$, $\lceil M \rceil = \{M + e\} \vee \{m - e\}$

$0 \le e \le 1$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j a'_{ij} = b' \quad , a'_{ij} , b' \in \mathbb{R}$$

$$b' = \lfloor b' \rfloor + e \; ; 0 \leq e < 1$$

$$a'_{ij} = \lfloor a'_{ij} \rfloor + e_{ij} \quad , 0 \leq e_{ij} \leq 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\lfloor a'_{ij} \rfloor + e_{ij} \right) = \lfloor b' \rfloor + e$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \lfloor a_{ij} \rfloor + \sum_{j=1}^{n} x_j e_{ij} = \lfloor b' \rfloor + e$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j e_{ij} - e = - \sum_{j=1}^{n} x_j \lfloor a_{ij} \rfloor + \lfloor b' \rfloor$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j e_{ij} - e \geq 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} \geq e$$

الشرط الجديد هو شرط غوري

نضيفه لآخر جدول و نعتبر السطر الموافق لهذا الشرط سطر الدوران ثم نختار عامود الدوران ونتابع بنفس الطريقة.

مثال: ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$F = 5x_1 + 6x_2 \longrightarrow Max$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 18 \longrightarrow y_1$$

$$2x_1 + x_2 \leq 12 \longrightarrow y_2$$

$x_1 + x_2 \leq 8 \rightarrow y_3$

$x_1, x_2 \geq 0 \quad , \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

أوجد الحل الأمثل . (سوف نحل بالطريقة العادية)

$F = 5x_1 + 6x_2 \rightarrow Max$

$2x_1 + 3x_2 + y_1 = 18$

$2x_1 + x_2 + y_2 = 12$

$x_1 + x_2 + y_3 = 8$

$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \; , \; x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	R.h
y_1	2	3	1	0	0	18
y_2	2	1	0	1	0	12
y_3	1	1	0	0	1	8
$-F$	-5	-6	0	0	0	0
x_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	6
y_2	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	6
y_3	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	-1	2
F	-1	0	2	0	0	36
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	3
x_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{9}{2}$
y_3	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	
F	0	0	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	40.5

$F^* = 40.5 \,,\; x_1 = 4.5 \,,\; x_2 = 3$

مثالي ومشكلة (معناه مش كل شرط عومري)

عادة نختار المتغير عن الصحيح الأكبر (يكون لدي كسة أعداد غير صحيحة لأن هذا المتغير يكون أقرب ما يمكن إلى الحل الأمثل).

$1.x_1 + 0x_2 - \frac{1}{4} y_1 + \frac{3}{4} y_2 + 0y_3 = 4.5$

$1x_1 + 0x_2 + (-1 + \frac{3}{4}) y_1 + (0 + \frac{3}{4}) y_2 + 0y_3 = 4 + \frac{1}{2}$

نكتب الأجزاء الصحيحة لوحدها والكسرية لوحدها.

$\cancel{\underbrace{[x_1 + 0x_2 + 0y_3 - y_1]}} + \frac{3}{4} y_1 + \frac{3}{4} y_2 = \cancel{4} + \frac{1}{2}$

$\frac{3}{4} y_1 + \frac{3}{4} y_2 \geq \frac{1}{2}$

$-\frac{3}{4} y_1 - \frac{3}{4} y_2 \leq -\frac{1}{2}$

"نضرب بإشارة ناقص حتى نمشي العملية"

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	R_1	R.h
x_2	0	1	1/2	-1/2	0	0	3
x_1	1	0	-1/4	3/4	0	0	4.5
y_3	0	0	-1/4	-1/4	1	0	1/2
R_1	0	0	-3/4	-3/4	0	1	-1/2
F	0	0	7/4	3/2	1	0	40.5

SABBAGH STATIONERY

نعتبر R_1 سطر الدوران ، نختار عامود الدوران

هنا نقسم قيم دالة الهدف على قيم سطر الدوران

ونختار أصغر نسبة موجبة بالقيمة المطلقة.

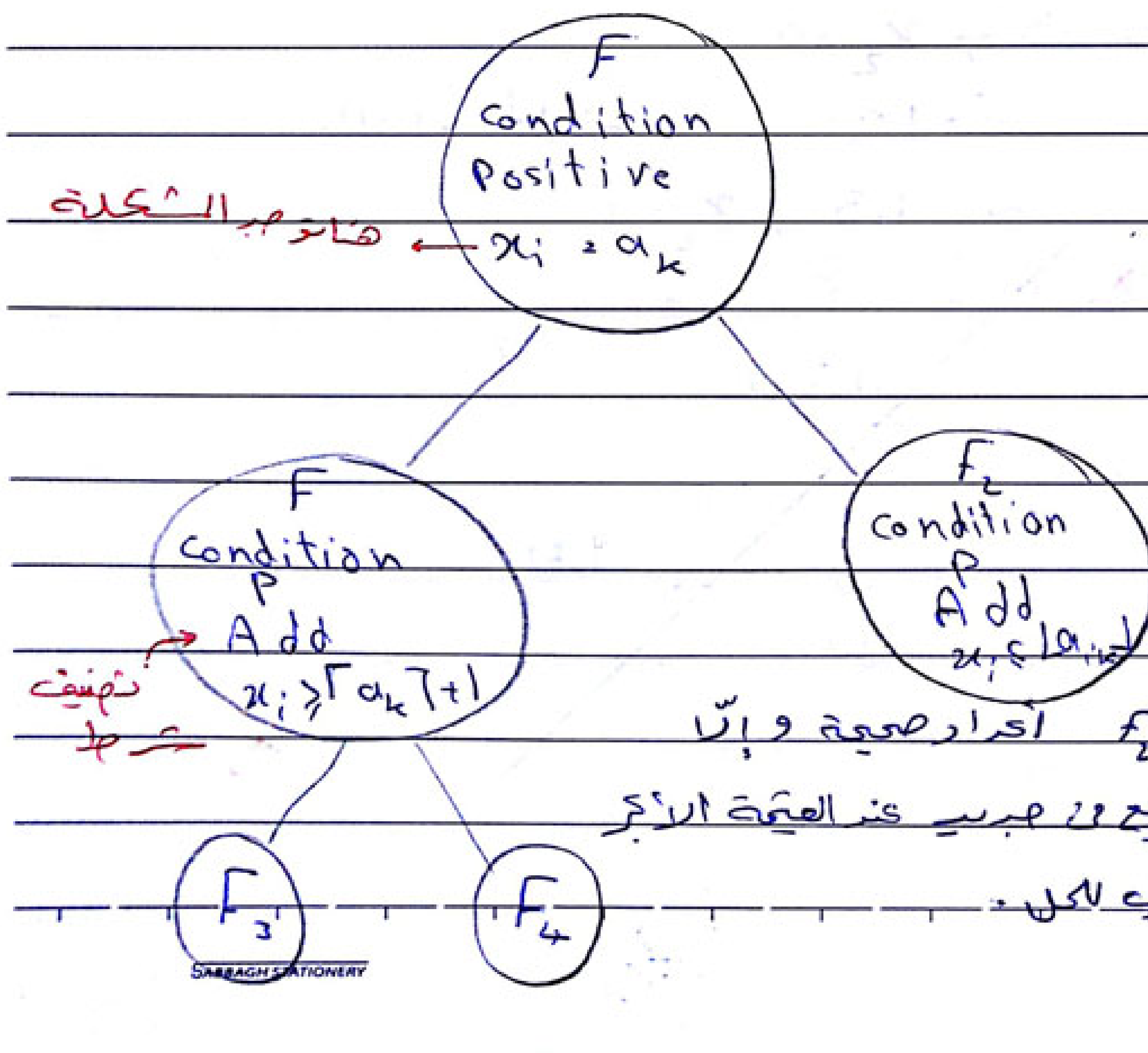
أي أصغرنا:

$$\frac{7/4}{-3/4} = -\frac{7}{3} \quad , \quad \frac{1/4}{-3/4} = -\frac{1}{3}$$

نطبق الآن خوارزمية السمبلكس (وظيفة)

نكرر العملية حتى تصبح x_1, x_2, x_3 أعداد صحيحة.

المحاضرة الثانية عشر : Branch and bound Method



ينتج F_1 أو F_2 أعداد صحيحة وإلّا نقوم بالتفريع من جديد عند القيمة الأكبر والأقرب للحل.

نفرض البرنامج التي تكون فيه دالة الهدف أعظمية

"عندما كلا هما ليس عدد صحيح"؟

- دوماً نأخذ قيمة دالة الهدف حتى أحصل على ما أريد.

مثال:

$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow Max$

$x_1 \leq 3 \rightarrow y_1$

$x_2 \leq 3 \rightarrow y_2$

$x_1 + x_2 \leq 4.5 \rightarrow y_3$

$x_1 , x_2 \geq 0$

x_1 , x_2 : Integer

أوجد الحل الأفضل لهذا البرنامج.

الحل:

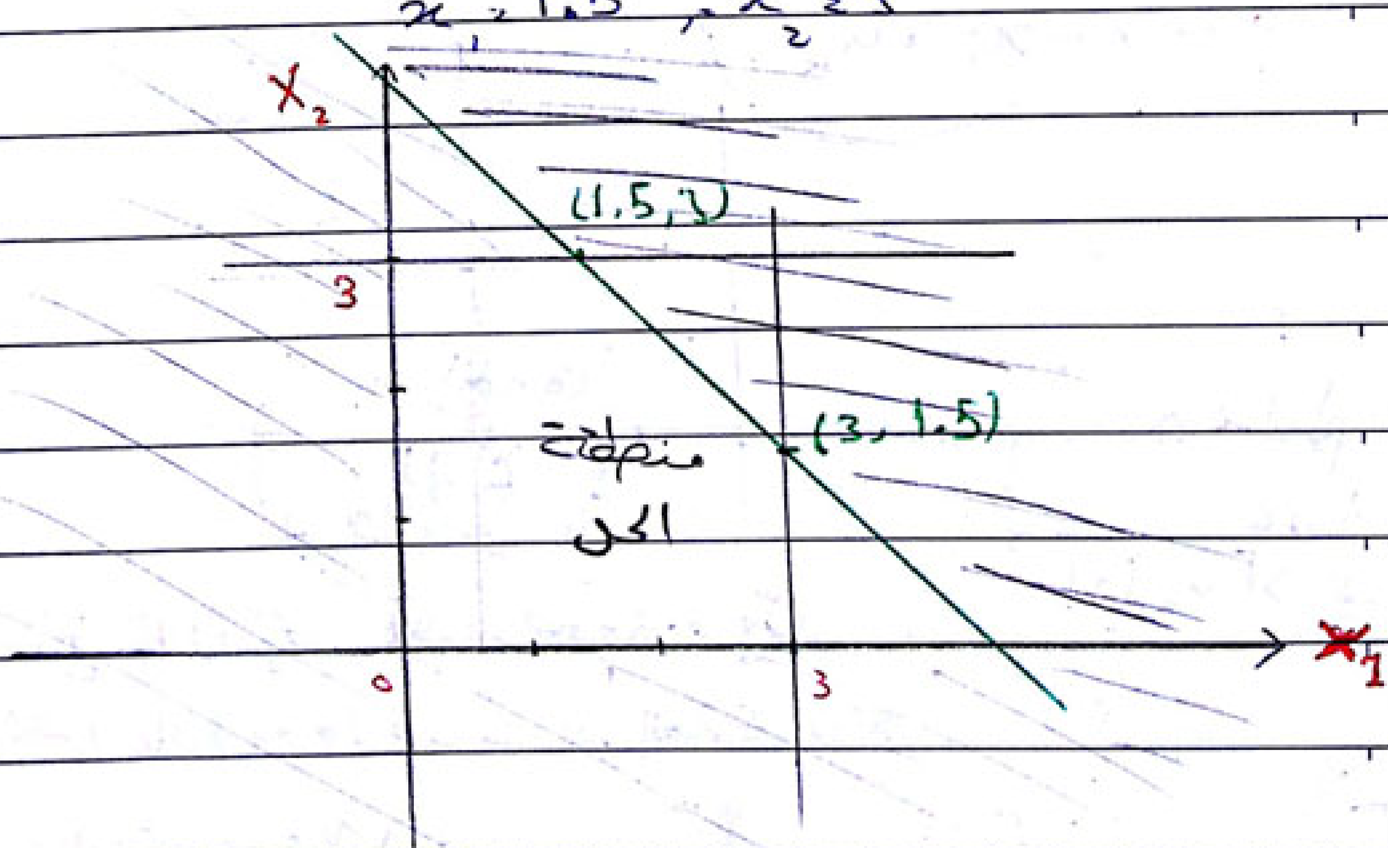
$x_1 + x_2 = 4.5$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 4.5$

$x_1 = 4.5 \Rightarrow x_2 = 0$

بالتالي الحل هو: $F = 12$

$x_1 = 1.5 , x_2 = 3$



سنحلّ الآن بطريقة simplex:

$F = 2x_1 + 3x_2 \to Max$

$x_1 + y_1 = 3$

$x_2 + y_2 = 3$

$x_1 + x_2 + y_3 = 4.5$

$x_1, x_2 \geq 0, \; x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$

$y_3, y_1, y_2 \geq 0$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	R.h
y_1	1	0	1	0	0	3
y_2	0	1	0	1	0	3
y_3	1	1	0	0	1	4.5
$-F$	-2	-3	0	0	0	0
y_1	1	0	1	0	0	3
x_2	0	1	0	1	0	3
y_3	1	0	0	-1	1	1.5
F	-2	0	0	3	0	9
y_1	0	0	1	1	-1	1.5
x_2	0	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	-1	1	1.5
F	0	0	0	1	2	12

$x_1 = 1.5, \; x_2 = 3, \quad F = 12$

سنقسم الآن شرطين (برنامجين):

$$F_1 = 2x_1 + 3x_2 \to max$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 \leq 4.5$$

$$x_1 \leq 1 \to$$ نضيف y_4

$$F_2 = 2x_1 + 3x_2 \to max$$

$$x_1 \leq 3$$

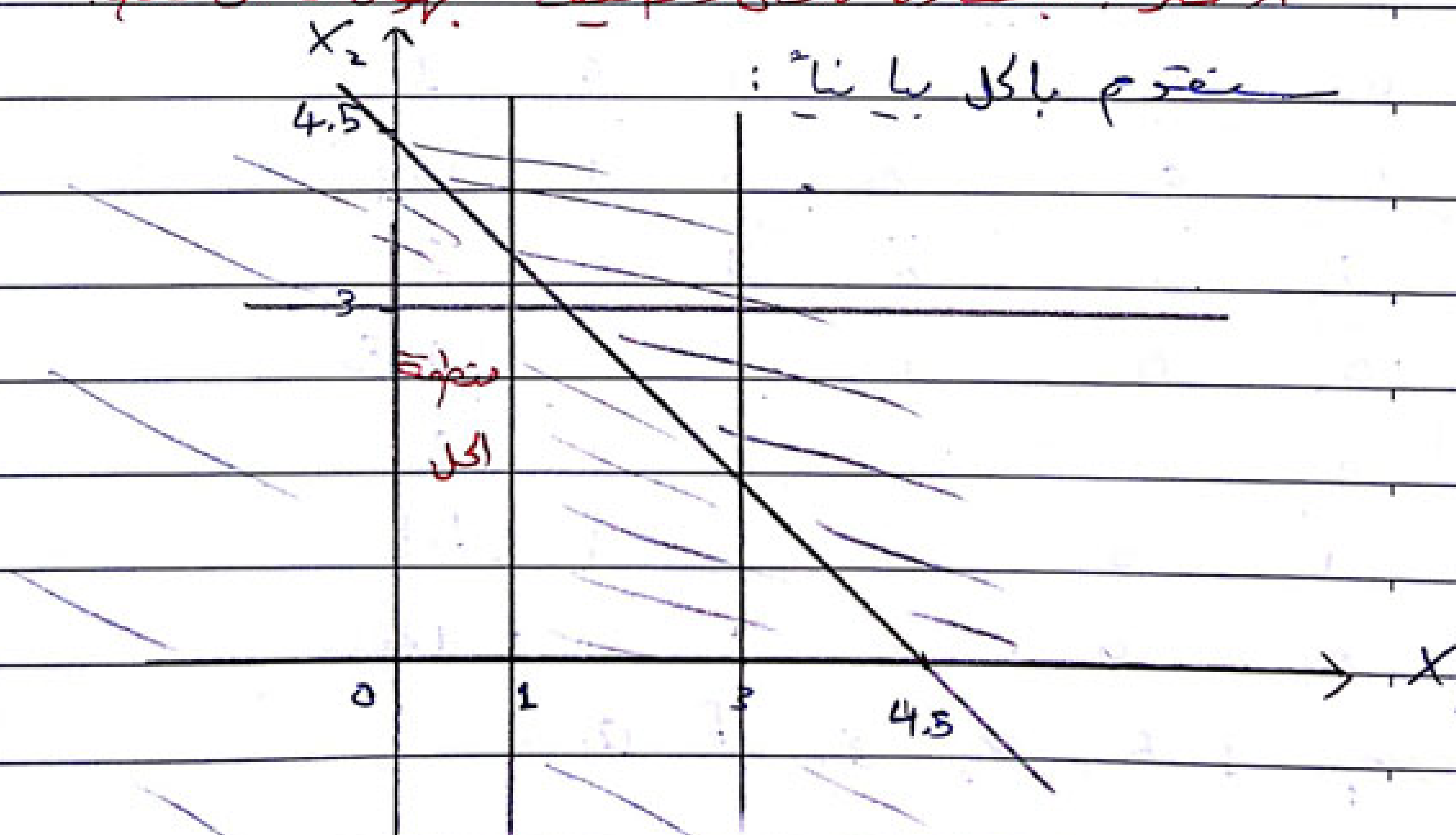
$$x_2 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 \leq 4.5$$

$$x_1 \geq 2 \to$$ نضيف مجهولاً فائضاً واصطناعي

أو نضرب بإشارة ناقص ونضيف مجهول فائض فقط.

سنقوم بالحل بيانياً:

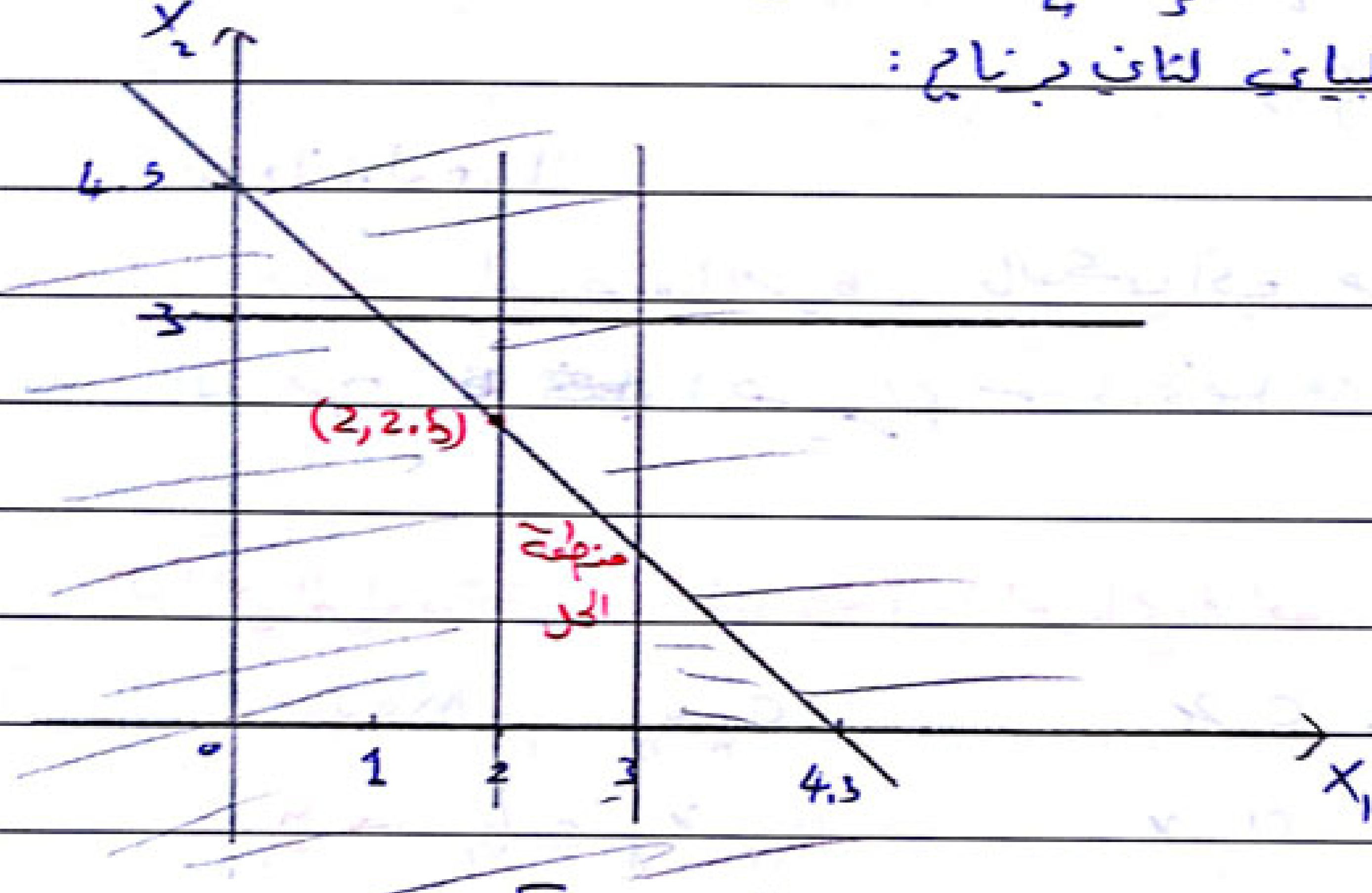


$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad F = 11$$

SABBAGH STATIONERY

وهنا سنجد الحل الأمثل سوف نجد أكبر دالة الهدف الخاصة بـ F_3 و F_4. هنا نكتفي بالحل ونمضي أن نقول أنا كبيرة ونقوم بالتوزيع

الحل البياني لثاني برنامج :



$x_1 = 2,\ x_2 = 2.5,\ F_2 = 11.5$

الآن سنفرع مرة ثانية :

$F_3 = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow Max$

$x_1 \leq 3$

$x_2 \leq 3$

$x_1 + x_2 \leq 4,5$

$x_1 \geq 2$

$x_2 \leq 2$

$F_4 = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow Max$

$x_1 \leq 3$

$x_2 \leq 3$

$x_1 + x_2 \leq 4.5$

$x_j \geq 3$

"تابع الحل لوحدنا"

ملاحظة: لو وضعنا الشرط بالعكس أي ضربنا بإشارات المتراجحة (جميعها) سوف نحصل على نفس الحل.

البرامج المرافقة (الثنوية) (البرنامج المرافق الثنوي):

$$F = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \to Max$$

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \to y_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \to y_m$$

$$x_i \geq 0 , \quad i = 1:n$$

سنفرض أننا وصلنا لآخر جدول والذي هو الحل التالي:

	$x_1 \dots x_n$	$y_1 \dots y_m$	R.h
x_1			0
y_m			0
$\vdots$			
F		$\boxed{0 \quad 0}$	

هذه قيم البرنامج الأصلي

هذه القيم ستكون قيم البرنامج المرافق نعرف بالقيمة المطلقة

البرنامج المرافق:

$$Z = b_1 y_1 + \dots + b_m y_m \to Min$$

$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \dots + a_{m1} y_m \geq c_1$$

$$a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{m2} y_m \geq c_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1} y_1 + \dots + a_{mn} y_m \geq c_n$$

$$y_j \geq 0, \quad j = 1, m$$

تطبيق على المثال السابق:

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to Max$$

$$x_1 \leq 3 \to y_1$$

$$x_2 \leq 3 \to y_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 4.5 \to y_3$$

البرنامج المرافق:

$$Z = 3y_1 + 3y_2 + 4.5\, y_3 \to Min$$

$$y_1 + y_3 \geq 2 \to -S_1 + R_1$$

$$y_2 + y_3 \geq 3 \to \underbrace{-S_2}_{\text{زوق}} + \underbrace{R_2}_{\text{صناعية}}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

لو طبقنا السمبلكس سوف أحصل على نفس النتيجة

من المثال السابق كان آخر جدول هو:

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	R.h
x_1	0	0	1	1	-1	1.5
x_2	0	1	0	1	0	3
x_3	0	0	0	1	2	1.5
F	0	0	0	1	2	12

$y_1 = 0 \ , \ y_2 = 1 \ , \ y_3 = 2$

$Z = 3 + 9 = 12$

المحاضرة 31 : تتمة التمرين:

$$Z = 3y_1 + 3y_2 + 4.5y_3 + MR_1 + MR_2 \longrightarrow Min$$

$$y_1 + y_3 - S_1 + R_1 = 2$$

$$y_2 + y_3 - S_2 + R_2 = 3$$

$$y_1 , y_2 , y_3 , S_1 , S_2 , R_1 , R_2 \geq 0$$

	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	R_1	R_2	R.h
R_1	1	0	1	-1	0	1	0	2
R_2	0	1	1	0	-1	0	1	3
$-Z$	-3	-3	-4.5	0	0	-M	-M	0
Z	$-3+M$	$-3+M$	$-4.5+2M$	$-M$	$-M$	0	0	5M

دوما نأخذ أصغر نسبة موجبة

[illegible]

أكبر عدد موجب

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	R_1	R_2	R.h
y_3	1	0	1	-1	0	1	0	2
R_2	-1	1	0	1	-1	-1	1	1
Z	15-M	-3+M	6	-4.5-M	M	4.5-2M		9-M
y_3	1	0	1	-1	0	1	0	2
y_1	-1	1	0	1	-1	-1	1	1
Z	-1.5	0	0	-1.5-2M	-3	15-M	3-M	12

تذكير: في Min في دالة الهدف نأخذ أكبر عدد موجب ويكون العمود الموافق هو عامود الدوران

البرامج المرافقة: النمط الأول:

$$F = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \to Max$$

$$a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1 \to y_1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m \to y_m$$

$$x_i \geq 0 \ , \ i = 1:n$$

$$Z = b_1 y_1 + \dots + b_m y_m \to Min$$

$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \dots + a_{m1} y_m \geq c_1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \dots + a_{mn} y_m \geq c_n$$

SABBAGH STATIONERY

$y_j \geq 0 , j=1:m$

النمط الثاني:

$$F = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \to Max$$

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_i \geq 0 , i=1:n$$

$$Z = b_1s_1 + \dots + b_ms_m \to Min$$

$$a_{11}s_1 + a_{21}s_2 + \dots + a_{m1}s_m \leq c_1$$

$$\vdots$$

$$a_{1n}s_1 + a_{2n}s_2 + \dots + a_{mn}s_m \leq c_n$$

$$s_l \geq 0 , l=1:m$$

ملاحظة: في المعادلات التي فيها مساواة
نحوّل المساواة إلى متراجحتين واحدة أكبر أو
تساوي وواحدة أصغر أو تساوي.
~~نحوّل إحداها جميع المتراجحات~~
نقوم بجعل المتراجحات في نفس الجهة (وذلك
بالضرب ب (-1)).

المحاضرة 14: سؤال امتحاني:

$F = 2x_1 + x_2 \rightarrow Max$

$x_1 + x_2 \leq 4 \rightarrow y_1$

$x_2 \geq 5 \rightarrow y_2$ ، $x_1, x_2 \geq 0$ ← نضرب بـ (-1) فتصبح $\leq$

حل البرنامج بيانياً - طبق الأرسمبلكس - أوجد البرنامج المرافق - حل البرنامج المرافق بيانياً ثم بطريقة السمبلكس

الحل: البرنامج المرافق: $Z = 4y_1 - 5y_2 \rightarrow Min$

$y_1 \geq 2$

$y_1 - y_2 \geq 1$

$y_1, y_2 \geq 0$

حسب الطريقة الأولى:

$Z' = -4S_1 + 5S_2 \rightarrow Min$

$-S_1 \leq 2$

$-S_1 + S_2 \leq 1$

تمرين هام للامتحان p: 263

$Z = 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 \rightarrow Max$

$-3x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 9x_4 \geq 0$ بحالة مناقشة وزونة

هنا يوجد حالة شاذة نكتب ذلك ثم نبدأ بالحل.

نضرب بالسالب - $2x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 5x_4 \geq -3$

فمن سيكون الطرف الثاني موجب $3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 15$

Game theory

1926 Von Neuman

تعتمد على الاحتمالات والحسابات.

بوجهة نظره كل شيء هو ألعاب بطرفين
أو أكثر.

لا توجد لعبة بشخص واحد.

عندما ازدادت شهرته بالألعاب صار الاثنين
بنفس مستوى الذكاء والتفكير بهذه
اللعبة على الأقل.

أول شيء باللعبة هو الربح والخسارة المعنوية
ألعاب الشطرنج، كرة القدم في الحارة
ألعاب معنوية.

يوجد ألعاب فيها Money
" " بفلوس

والعاب بدون فلوس. أنو يوجد خسارة مادية
يربحها كاملة الطرف الثاني ما بدها ضامن أو كفيل

عندما يصبح هناك كفيل يصبح هناك
"لعبة القمار".

المحاضرة الخامسة عشرة:

مصفوفة المدفوعات:

هي عبارة عن جدول يتضمن قيمة المدفوعات بعد إجراء كلعبة.

A \ B	فردي	زوجي
فردي	3	-2
زوجي	-1	1

هذه المصفوفة تسمى مصفوفة المدفوعات

اللاعب الجيد يختار الاستراتيجية الصرفة

تعريف الاستراتيجية الصرفة:

وهي الاستراتيجية التي يختارها اللاعب التي تضمن له دخل مؤكد على الأقل وذلك باختيار أفضل أسوأ دخل لكل استراتيجية من الاستراتيجيات المتاحة له.

A يختار الاستراتيجية التي تحقق له (Max Min)
حيث أن Max للربح و min للخسارة.
أما بالنسبة للاعب B فهي (Min Max).
لأنها نقطة الاستقرار.

$E \, , \, e_{ij}$

اللاعب A $\quad \max_i \min_j a_{ij}$

B $\quad \min_j \max_i e_{ij}$

نقطة الاستقرار (تمثل دالة الهدف):

نبحث في مصفوفة المدفوعات عن القيمة العظمى الدنيا بالنسبة للاعب الأول عن القيمة الدنيا العظمى بالنسبة للاعب الثاني.

عندئذٍ تكون اللعبة مستقرة إذا تحقق الشرط:

$$\max_{i} \min_{j} e_{ij} = \min_{j} \max_{i} e_{ij}$$

نقطة الاستقرار تمثل تسعيرة اللعبة (دالة الهدف)

توجد ألعاب غير مستقرة ولكن يمكن أن

A \ B	فردي	زوجي	
فردي	3	-2	-2
زوجي	-1	1	1
	3	1	1 \ 1

هذه اللعبة غير مستقرة.

مثال: لتكن لدينا اللعبة الاستراتيجية التالية:

A \ B	S	T	R	Min
I	3	-5	0	-5
II	-4	-2	1	-4
III	$\boxed{2}$	3	$\boxed{+2}$	2
Max	3	3	2	2 \ 2

النقطة التي تحقق نقطة الاستقرار

$2 \rightarrow$ Max Min

Min Max

بيّن فيما إذا كانت هذه اللعبة مستقرة.

الحل:

هذه اللعبة مستقرة؛ الاستراتيجية لكلا اللاعبين هي:

(III , R)

ويوجد استراتيجية ثانية هي (III , S)

فاللعبة مستقرة ويوجد استراتيجيتين ~~للاعب~~ للاعب الأول يكون قد حقق لعب الاستراتيجية الصرفة

و ~~اللاعب الثاني~~ يكون كذلك بالنسبة للاعب الثاني.

أي كلاً من A و B يلعب بالاستراتيجيتين (III,R) , (III , S)

الاستراتيجية المختلطة: $1-y$ y

	A\B	S	R	Min
x	I	-3	7	-3
$1-x$	II	6	1	1
	Max	6	7	$\cancel{6}$ 1

هذه اللعبة ليست مستقرة والاستراتيجية مختلطة.

يلعب اللاعب A الاستراتيجية I باحتمال x

ويلعب الاستراتيجية II باحتمال $1-x$

يلعب اللاعب B الاستراتيجية S باحتمال y

والاستراتيجية R باحتمال $1-y$

يجب أن يكون مجموع الاحتمالات في العامود 1 وفي السطر 1 أي:

$x + (1-x) = 1 \quad \wedge \quad y + (1-y) = 1$

الحساب بالنسبة للاعب A: سنفرض أن B يلعب دوماً الاستراتيجية

واللاعب A يلعب الاستراتيجية الأولى باحتمال x

تارةً والاستراتيجية الثانية باحتمال $1-x$ تارةً أخرى.

$$-3x + (1-x)6 = 6-9x$$

لو لعبة اللاعب B دوماً الاستراتيجية R بينما اللاعب

A يلعب الاستراتيجية الأولى باحتمال x

والاستراتيجية الثانية باحتمال $1-x$.

$$7x + (1-x)1 = 1+6x$$

تكون اللعبة الاستراتيجية المثالية تتحقق إذا

لعب اللاعب A الاستراتيجيات المتاحة بالاحتمال

التالي:

$$6-9x = 1+6x$$

$$6-1 = 9x+6x$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 1-x = \frac{2}{3}$$

إذاً يجب أن يلعب اللاعب A الاستراتيجية الأولى I

باحتمال $\frac{1}{3}$ والاستراتيجية الثانية II باحتمال $\frac{2}{3}$

تعيين اللعبة (دالة الهدف بالنسبة للاعب A).

نأخذ المعادلة الأولى ونبدلها أو نأخذ المعادلة

الثانية ونبدلها:

لو أخذنا المعادلة الأولى

$g(A) = 6 - 9x = 6 - 9\left(\frac{1}{3}\right) = 3$

لو أخذنا المعادلة الثانية:

$g(A) = 1 + 6x = 1 + 6\left(\frac{1}{3}\right) = 3$

الحساب بالنسبة للاعب B:

اللاعب A يلعب دوماً الاستراتيجية I بينما

اللاعب B يلعب دوماً تارة بالاستراتيجية S وتارة بالاستراتيجية R

$3y + (1-y)7 = 7 - 10y$

الحالة الثانية: اللاعب A يلعب الاستراتيجية II دوماً

واللاعب B يلعب الاستراتيجية S باحتمال y

والاستراتيجية R باحتمال 1-y

$6y + (1-y)1 = 1 + 5y$

احتمال لعب الاستراتيجيات للاعب B والذي يُعطى

بالاستراتيجيات المثالية للاعب B.

$7 - 10y = 1 + 5y \Rightarrow 6 = 15y$

$y = \frac{6}{15} \Rightarrow 1 - y = \frac{9}{15}$

$y = \frac{2}{5} \quad , \quad 1 - y = \frac{3}{5}$

تسعيرة اللعبة للاعب B: $g(B) = 7 - 10\left(\frac{2}{5}\right) = 3$

تعيرة اللعبة للاعبين بحورة نقرا .

الموذج الرياضي الآتي لعبة:

لدينا لاعبين A و B

A \ B	y_1 1	y_2 2	...	y_n n
x_1 1	e_{11}	e_{12}	...	e_{1n}
x_2 2	e_{21}	e_{22}	...	e_{2n}
⋮	⋮			
x_m m	e_{m1}	...	...	e_{mn}

احتمالات الاستراتيجيات ← استراتيجيات

مصفوفة المفروضة (عددية) (قيم حقيقية)

الاحتمالات ← استراتيجيات

$e_{ij} \in \mathbb{R}, i=1:m, j=1:m$

لكل تختلف استراتيجية الاعب الأول واستراتيجية اللاعب الثاني الاستراتيجيات عدد من الأزواج هنا وو

سناقش كل لاعب على حدة : (سنحول البرنامج خطي ونستخدم Simplex)

A) تعيرة اللعبة g

$x_1 + \dots + x_m = 1$ شعة احتمالية

لو لعب الاستراتيجية و A لعب كل الاستراتيجيات B يجب أن يكون لدي n معادلة.

المتباينات :

$$
n \text{ معادلة}
\begin{cases}
e_{11}x_1 + e_{21}x_2 + \dots + e_{m1}x_m \geq g \\
e_{12}x_1 + e_{22}x_2 + \dots + e_{m2}x_m \geq g \\
\vdots \\
e_{1m}x_1 + \dots + e_{mn}x_m \geq g
\end{cases}
$$

← لأننا نريد الربح أكبر ما يمكن

لدينا m+1 مجهول (g مجهول)

$x_i \geq 0, \ i = 1:m$

B) تعريف اللعبة g

$y_1 + \dots + y_n = 1$

$$\left.\begin{array}{l} e_{11} y_1 + e_{12} y_2 + \dots + e_{1n} y_n \leq g \\ e_{21} y_1 + e_{22} y_2 + \dots + e_{2n} y_n \leq g \\ \vdots \\ e_{m1} y_n + \dots + e_{mn} y_n \leq g \end{array}\right\}$$

m معادلة

بـ $n+1$ مجهول

نريد أن نقلل الربح

$y_j \geq 0, \ j = 1:n$

سنقسم هدف اللاعب A هو $g \to \max$

أو $\frac{1}{g} \to \min$

هدف اللاعب B هو $g \to \min$

أو $\frac{1}{g} \to \max$

سنقسم :

$\frac{x_i}{g} = t_i , \ i = 1:m$

$\frac{y_j}{g} = S_j , \ j = 1:n$

$$\frac{x_i}{g} = t_i \; ; i = 1:m$$

$$F = t_1 + t_2 + \dots + t_m \rightarrow Min$$

$$e_{11} t_1 + \dots + e_{m1} t_m \geq 1$$

$$\vdots$$

$$e_{1n} t_1 + \dots + e_{mn} t_m \geq 1$$

$$t_i \geq 0 , \; i = 1:m$$

$$\frac{y_j}{g} = S_j , \quad j = 1:n$$

$$S_1 + \dots + S_n \rightarrow Max$$

$$e_{11} S_1 + \dots + e_{1n} S_n \leq 1$$

$$\vdots$$

$$e_{m1} S_1 + \dots + e_{mn} S_n \leq 1 \qquad S_j \geq 0 , \; j = 1:n$$

البرنامج المرافق للاعب A هو البرنامج المرافق للاعب B
والعكس بالعكس.

نموذج السؤال :

أوجد احتمال نسبة الاستراتيجيات المتاحة للاعب A
علماً أن مصفوفة المدفوعات معطاة بالشكل
التالي ..

نقوم بحل البرنامج المرافق أي B لأنه أسهل

حيث أننا نضيف فقط محاصيل خاملة أما لو قمنا على البرنامج لـ A

فإنه يجب لأننا سوف نضيف محاصيل صناعية وخاملة

ملاحظة: يجب أن توجد قيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ بعد إيجاد قيم $t_1, t_2, \dots, t_n$

مثال: أوجد البرنامج المناسب للاعب A

$$\begin{array}{c|cc} A \backslash B & & \\ \hline & -3 & 7 \\ & 6 & 1 \end{array}$$

A)
$$f = t_1 + t_2 \to Min$$
$$-3t_1 + 6t_2 \geq 1$$
$$7t_1 + t_2 \geq 1$$
$$t_1, t_2 \geq 0$$

B)
$$Z = S_1 + S_2 \to Max$$
$$-3S_1 + 7S_2 \leq 1$$
$$6S_1 + S_2 \leq 1$$
$$S_1, S_2 \leq 0$$

وظيفة.

المحاضرة السادسة عشر:

~~[illegible]~~ التحليل الشبكي:

هي عبارة عن مجموعة من العقد والأقواس بحيث

لا تملك دائرة مغلقة (جميع أضلاع الدائرة لها نفس الاتجاه).

المقارنة بين الشبكات والمسائل التمثيلية :

تمثل العقدة حدث و يمثل القوس نشاط .

الحدث : Event هو عبارة عن واقعة تشير إلى بداية نشاط أو نهاية نشاط .

النشاط : (Activity)

هو إجراء لتنفيذ عمل معين و ممكن أن يكون مصحوباً بالزمن و التكلفة .

(لكل نشاط مدة زمنية محددة)

المشروع : project

هو عبارة عن مجموعة من الأنشطة و الأحداث المترابطة التي يجب أن تنفذ وفق تسلسل محدد للوصول إلى الهدف المطلوب .

المسار : path هو المسار الذي يصل بين حدث البداية وحدث النهاية . (لا يهمل اتجاه الأقواس)

النشاط الوهمي Dummy Activity

هو نشاط لا يصحبه زمن ولا تكلفة لكن يستخدم للتخلص من بعض الحالات الشاذة في المسألة (رسم بشكل متقطع).

الحدث الوهمي Dummy Avent

هو حدث افتراضي يستخدم للتخلص من الحالات الشاذة.

ملاحظة:

الشبكة التي توافق مسألة تطبيقية يجب أن تحقق مايلي:

١- لها عقدة بداية واحدة وعقدة نهاية واحدة. ركلا

٢- لا تتضمن الشبكة أي عقدة لا يسبقها نشاط عدا عقدة البداية

٣- عقدة النهاية يتبعها أي نشاط.

٤- لا تتضمن الشبكة أي أنشطة لا يتبعها أنشطة عدا الأنشطة التي تصل إلى عقدة النهاية.

ملاحظة:

لا يمكن إنجاز أي حدث ما لم ينجز جميع الأنشطة التي تسبقه

ولا يمكن البدء في البدء في أي نشاط ما لم يكن الحدث الذي قبله قد أُنجز.

زمن التفاؤل: (OT) optemistic time

هو الزمن اللازم لانجاز أي نشاط إذا كانت الظروف

مواتية.

زمن التشاؤم: pessimistic time (P.T)

هو الزمن اللازم لإنجاز أي نشاط إذا كانت الظروف معاكسة.

الزمن الأكثر احتمالاً Most likley time (M.L.T)

وهو الزمن المتوقع رغم جميع الظروف المواتية وغير المواتية لإنجاز نشاط معيّن.

للحصول على أفضل تقدير لإنجاز نشاط ما نأخذ التوقع الرياضي لهذا النشاط. ولحساب هذا التوقع نحتاج إلى معرفة قوانين التوزيع الاحتمالي للمدة الزمنية اللازمة لإنجاز هذا النشاط.

إنّ أكثر القوانين الاحتمالية المستخدمة في مجال الشبكات هو توزيع Beta distribution

وطبقاً لهذا التوزيع فإن التوقع (الأمل) الرياضي لإنجاز نشاط ما يُعطى بالطريقة التالية:

$$e = \frac{(O.T) + 4 * (M.L.T) + (P.T)}{6}$$

وبما أن الزمن الحقيقي لإنجاز نشاط ما قد يختلف عن الزمن الذي نحصل عليه من خلال التوقع

الحسابي ما نحتاج إلى تعيين تشتت هذا الزمن (الانحراف المعياري) الذي نعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$\sigma = \frac{(P.T) - (O.T)}{6}$$

ملاحظة:

يتم تحديد المعلومات المتعلقة بزمن التفاؤل وزمن التشاؤم والأكثر الأوقات احتمالاً إما من خلال المعلومات التراكمية في مركز بحثي أو من خلال استقصاء الخبراء في هذا المجال.

المسار الحرج:

يعد المسار الحرج هدفاً أساسياً في التحليل الزمني للشبكات فإذا درسنا شبكة ما ففي الواقع هذه الشبكة تتألف من عدة مسارات كلها تصل بين حدث البداية وحدث النهاية.

كل مسار يتألف من عدد من الأحداث والأنشطة.

المدة الزمنية للمسار تساوي مجموع المدة الزمنية للأنشطة (تكلفة المسار وهو مجموع تكلفة أنشطته.

- يقال عن النشاط أنه حرج إذا كان التأخير في الحجم البدء به يؤدي إلى التأخير في بدء المشروع.

ونقول عن النشاط أنه غير حرج إذا كانت طبيعة المشروع تسمح بالبدء في هذا النشاط في وقت

مبكر أو في وقت متأخر دون أن تؤثر على المدة
الزمنية اللازمة لإنجاز المشروع.

إذاً المسار الحرج هو عبارة عن متتالية من
الأنشطة الحرجة التي تصل بين حدث البداية
وحدث النهاية:

لحساب المسار الحرج نحتاج إلى التعاريف
التالية:

أبكر وقت Erliest Time (E.T) صار ينوه بالعودة 2

وهو الزمن المبكر لوقوع حدث ويمثل اللحظة
التي لا يمكن للحدث التالي أن يتحقق قبله.

ويحسب عادة من العلاقة التالية:

$$E.T_j = \max(E.T_i + e_{ij})$$

لحدث j — الحدث i الذي قبله

أما أكبر زمن للحدث فهو الزمن الذي يتنبأ به
بعد إنجاز الحدث المعني.

آخر وقت Latist at Time (L.T)

وهو آخر زمن مسموح به لوقوع حدث ما ويمثل
اللحظة التي لا يجوز أن يتأخر تحقيق الحدث.

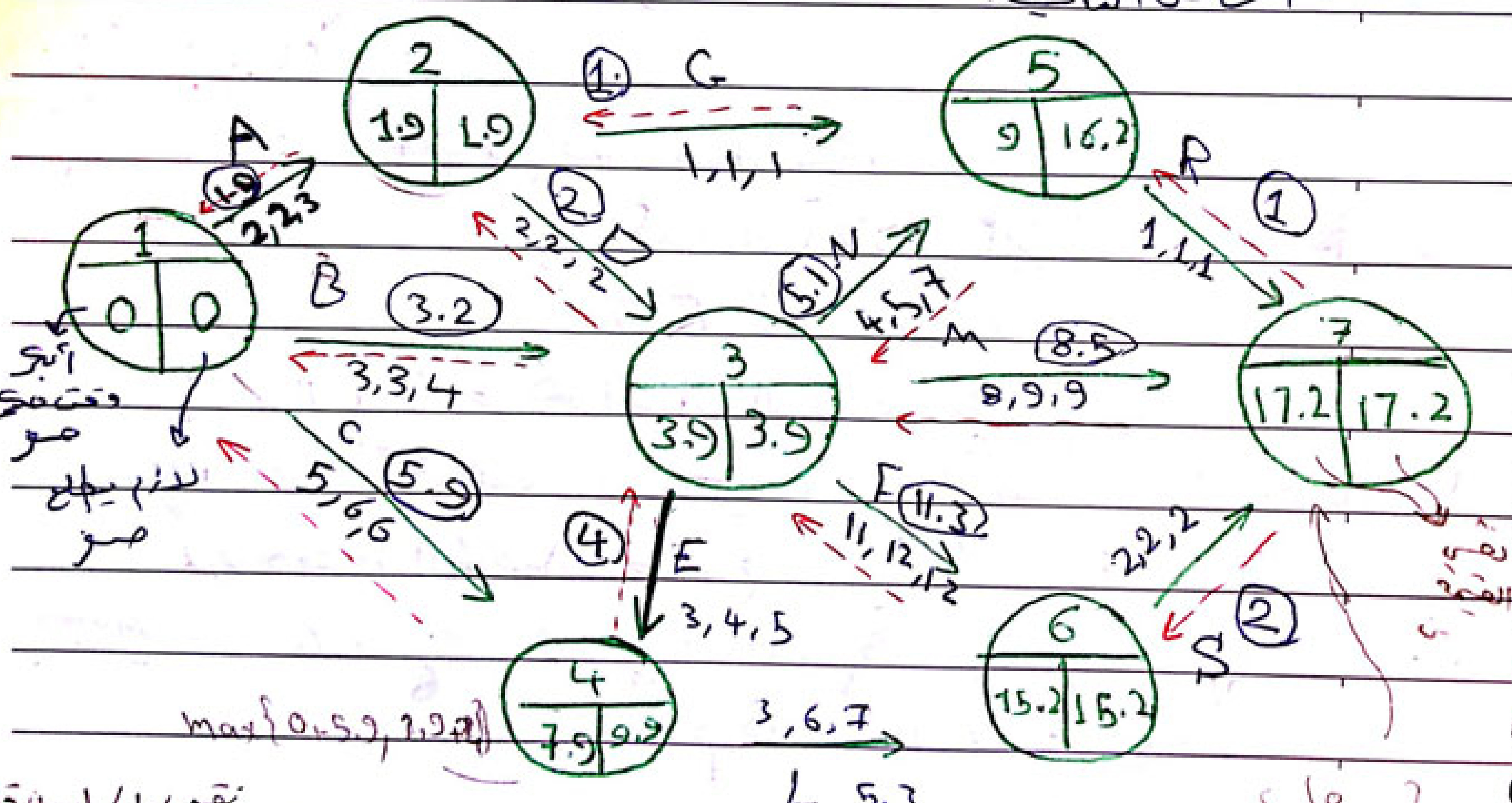
ويعرف أيضاً بأنه الزمن الأبعد الذي يمكن
أن يظهر من خلاله الحدث.

ويحسب عادة من العلاقة التالية:

$$L.T_i = \min (L.T_j - e_{ij})$$

ويتم حساب هذا الزمن انطلاقاً من حدث النهاية في الشبكة، وبنهايته حساب أكبر وقت انطلاقة من حدث البداية لذلك تعتبر الوقت الزمني لحدث البداية حيث النهاية الباقي يساوي الصفر و آخر وقت لحدث النهاية مساوياً ~~للصفر~~ أكبر وقت لحدث النهاية وآخر وقت لحدث البداية يساوي الصفر.

مثال: لنفرض أنه لدينا مسألة تطبيقية وتم تمثيلها من خلال شبكة وكانت الشبكة على الشكل التالي:

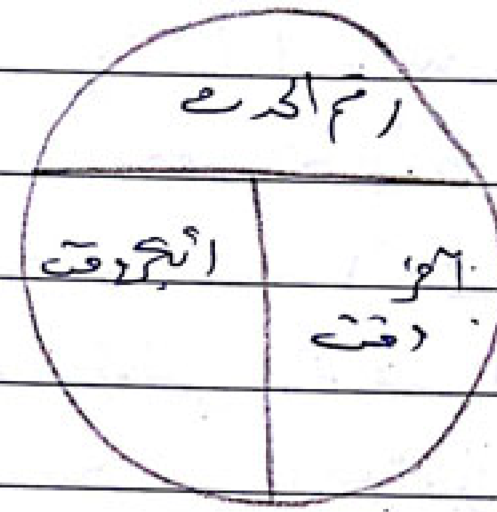


نقوم بالكتابة

إجراء الدراسة السابقة مباشرة على ~~الشكل~~ (الشبكة) نقسم كل حدث إلى ثلاثة أقسام

2, 2, 3 → وقت التشاؤم

وقت التفاؤل — أكثر الأوقات احتمالاً



عندما نمشي بالعكس (الأسهم المنقطة) نأخذ على كل اتجاهات الشبكة أدنى نأخذ Min

$17.2 - 1 = 16.2$

$17.2 - 2 = 15.2$

المسار الحرج هو أطول مسار.

وقت التعطيل: هو حاصل طرح أبكر وقت من آخر وقت

$S = L.T. - E.T.$

المسار الحرج هو المسار الذي يربط بالـ هو أطول مسار بين جميع الأحداث التي يكون فيها وقت التعطيل معدوم.

$S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 0, S_4 = 2, S_6 = 6$

$S_5 = 7.2, S_7 = 0$

Critical path المسار الحرج

$C.P = 1 \xrightarrow{1.9} 2 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{N.3} 6 \xrightarrow{2} 7$

Length of C.P = |C.P.| = 17.2

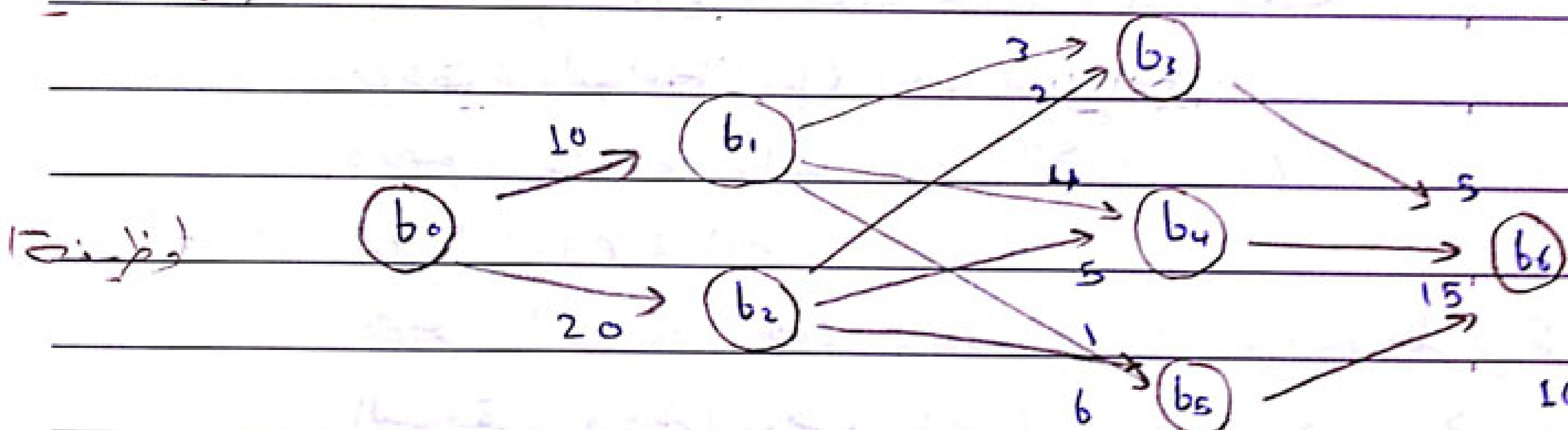
المحاضرة السابعة عشر:

حل مسألة النقل باستخدام الشبكة:

لتكن لدينا مسألة النقل التالية:

مستهلك / مصدر	b_3	b_4	b_5	الموجودات
b_1	3	4	1	10
b_2	2	5	6	20
الطلب	5	15	10	30

تحويل البيانات إلى شبكة



تم إضافة مركز تصدير وهمي ومركز استهلاك وهمي

لحل هذه المسألة نستخدم خوارزمية Ford & Fulkerson Algorithm

الخطوة الأولى: نؤشر بـ (∞) العمود الموافق لـ b_0 والسطر الموافق لـ b_0.

الخطوة 2: نبحث في السطر الموافق لـ b_0 على الخلايا التي قيمها غير معلومة ونؤشر تلك الأعمدة الموافقة لتلك القيم (العمود i مثلاً) $(0,h_i);h_i=C_{0i}$ ثم نضع هذه

الشريحة أو السطر الموافق للعقدة n.

$\boxed{2}$ ندرس الأسطر بالتتالي في الأعمدة الغير مؤشرة ونزودها بالثنائية (مثلاً ا هر ; (l, h_k)

H_k هو الـ ~~max~~ $h_k = \min(h_l, c_{lk})$

نكرر هذه الخطوات حتى نؤشر جميع الأسطر والأعمدة

عندئذٍ نحصل على قيمة الطاقة التمريرية

ولتكن $Q = \min(h_s, c_{sn})$

← هذه الثنائية نحصل عليها عند آخر عمود، وآخر سطر

نضع إشارة ناقص على كميات التدفق من عقدة البداية إلى عقدة النهاية

ونضع إشارة زائد على الكميات على الخلايا المناظرة لها.

نطرح الكمية حيثما توجد إشارة (-) نطرح كمية التدفق وحيثما توجد إشارة (+) نضيف كمية التدفق.

نكرر الخطوات السابقة بحيث تصبح جميع القيم الموافقة للعمود الأخير معدومة

ويكون

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

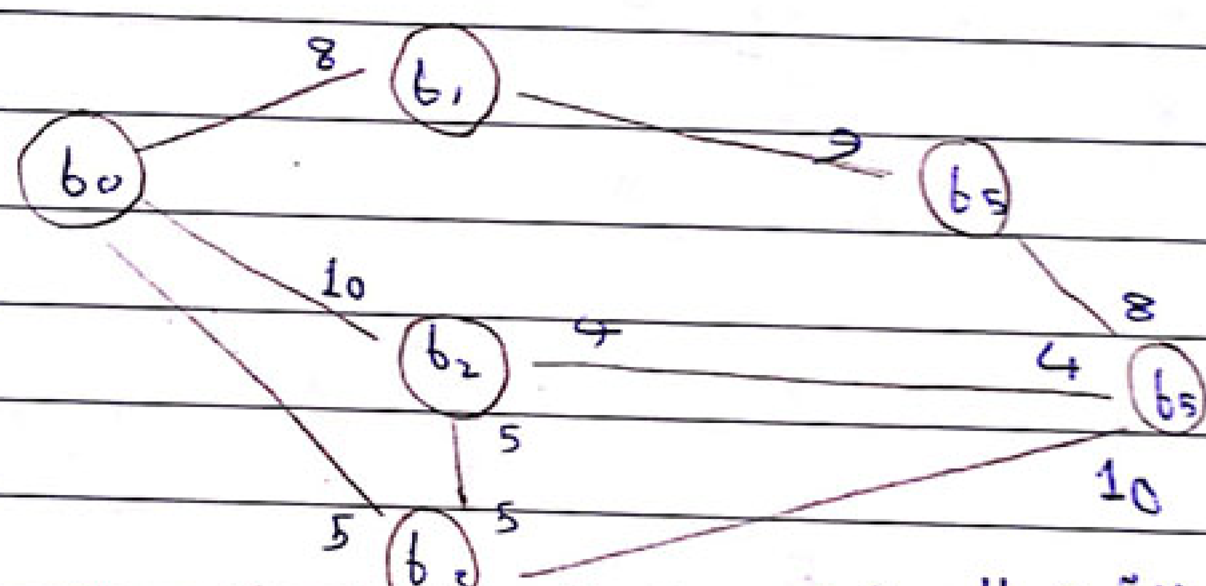
نطرح الجدول النهائي من الجدول البدائي.

فنحصل على جدول جديد يتضمن ما يلي:

الأرقام ان القيم الموجبة تمثل التدفق بين العقد البينية
أو من عقدة البداية إلى عقدة النهاية.
الأرقام السالبة تمثل كميات الغير موجودة في مركزها.
القيمة صفر تعني عدم وجود أي كمية.

مثال:

ليكن لدينا مسألة النقل المعطاة بالشبكة التالية:



سنرتب الآن الجدول:

		* b_0	(0,8) b_1	(0,10) b_2	(0,5) b_3	(1,9) b_4	(2,4) b_5
	* b_0		8	10^-	5		
(0,8)	b_1	4^+				9	
(0,10)	b_2				5		4^-
(0,5)	b_3			5			10
(1,8)	b_4						8
(2,4)	b_5			4^+			

→ min(9,8)=8

$Q_1 = 4$

قيمة Q_1 هي آخر قيمة

b_5 هي (2,4) ← خانة السطر الثاني، والسطر الثاني b_2 ← (0,10) من
مباشرة من السطر 0 البداية.

$b_0 \longrightarrow b_2 \longrightarrow b_5$

$(b_0, b_2), (b_2, b_5)$ لِ (−) نضع

$(b_2, b_0), (b_5, b_2)$ لِ (+) نضع

	* b_0	(0,8) b_1	(0,6) b_2	(0,5) b_3	(1,8) b_4	(3,5) b_5
* b_0		8	6	5^-		
(0,8) b_1					9	
(0,6) b_2	4			5		0
(0,8) b_3	1^+		5			10^-
(1,8) b_4						8
(3,5) b_5			8	5^+		

$Q_2 = 5$

$b_0 \longrightarrow b_3 \longrightarrow b_5$

$(b_0, b_3), (b_3, b_5)$ −

$(b_3, b_0), (b_5, b_3)$ +

	b_0 (0,8)	b_1 (0,6)	b_2 (2,5)	b_3 (1,8)	b_4 (3,5)	b_5
* b_0		8	6^-	0		
(0,8) b_1					9	
(0,6) b_2	4^+			5^-		0
(2,5) b_3	5		5^+			5^-
(1,8) b_4						8
(3,5) b_5			8	5^+		

$Q_3 = 5$

$b_0 \longrightarrow b_2 \longrightarrow b_3 \longrightarrow b_5$

$- \; (b_0, b_2), (b_2, b_3), (b_3, b_5)$

$+ \; (b_2, b_0), (b_3, b_2), (b_5, b_3)$

	* b_0	b_1 (0,8)	b_2 (0,1)	b_3 (5,8)	b_4 (1,8)	b_5 (4,8)
* b_0		$^-8$	1	0		
(0,8) b_1	+				$^-9$	
(0,1) b_2	9			0		0
b_3	5		10			0
(1,8) b_4		+				$^-8$
(4,8) b_5			8	10	+	
			~~8~~	~~10~~		

$Q_4 = 8$

$b_0 \rightarrow b_1 \rightarrow b_4 \rightarrow b_5$

$- \ (b_0, b_1) \ , \ (b_1, b_4) \ , \ (b_4, b_5)$

$+ \ (b_1, b_0) \ , \ (b_4, b_1) \ , \ (b_5, b_4)$

	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
b_0		0	1	0		
b_1	8				1	
b_2	9			0		0
b_3	5		10			0
b_4		[illegible]				0
b_5			8	10	8	

أصبح لدي عامود كله عناصره أصفار بالتالي هنا
هو الجدول النهائي .

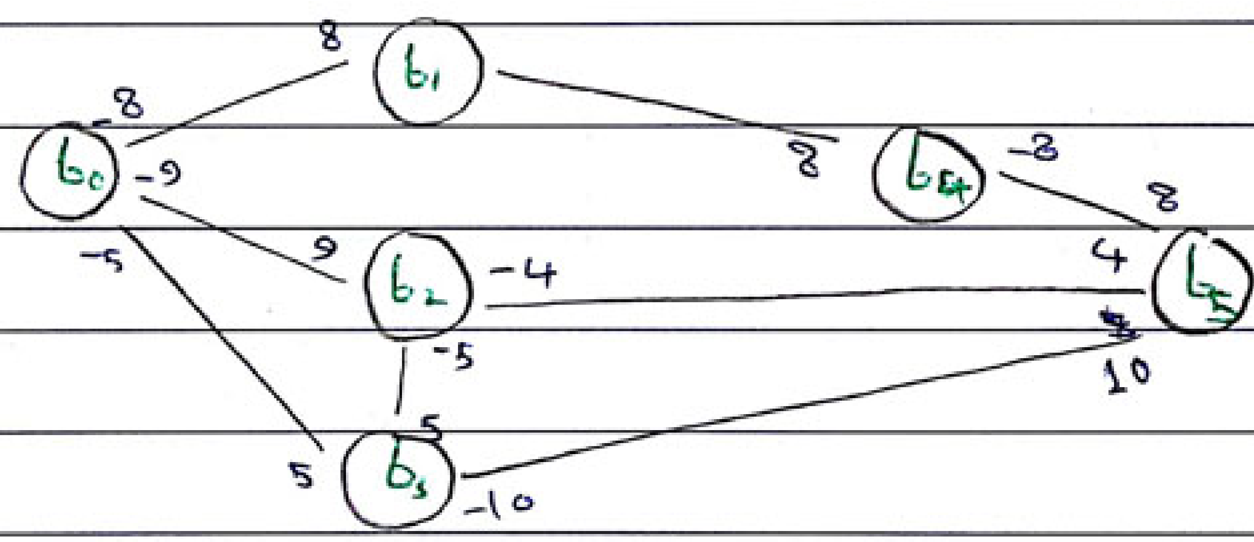
كلفة التدفق :

$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 4 + 5 + 5 + 8 = 22$

نطرح هذا الجدول من الجدول الباقي :

	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
b_0		8	9	5		
b_1	-8				+8	
b_2	-9			+5		+4
b_3	-5		-5			10
b_4						8
b_5			-4	-10	-8	

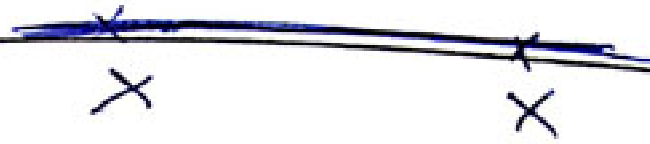
نرسم البيان الموافق :



العمود الأخير يمثّل التدفق الأعظمي

المجموع وفق أي سطر وأي عمود يجب أن يكون مساوياً للصفر باستثناء الأعمدة الموافقة لـ b_0 والأسطر الموافقة لـ b_0.

السطر الأخير والعمود الأخير.



المحاضرة 7 :

$L = \{x : \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 = x , \lambda \in \mathbb{R}\}$

نقاط مستقيم في الفضاء.

لدي x_1, x_2 معلومتين.

القطعة المستقيمة

$[x_1, x_2]$ القطعة المستقيمة المغلقة

$[x_1, x_2] = \{x : x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 , 0 \le \lambda \le 1\}$

القطعة المستقيمة المفتوحة من اليمين:

$[x_1, x_2[= \{x : x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 , 0 < \lambda \le 1\}$

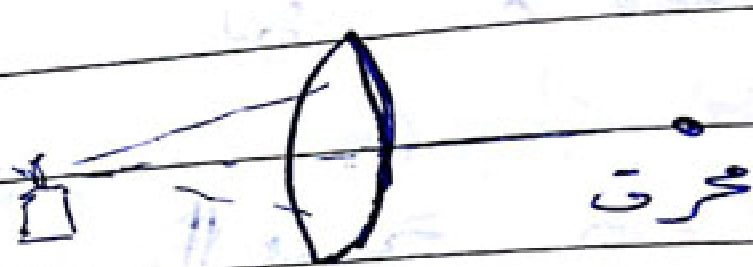
القطعة المستقيمة المفتوحة من اليسار:

$]x_1, x_2] = \{x : x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 , 0 \le \lambda < 1\}$

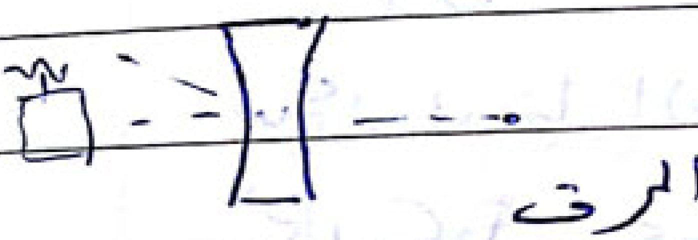
القطعة المستقيمة المفتوحة:

$]x_1, x_2[= \{x : x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 , 0 < \lambda < 1\}$

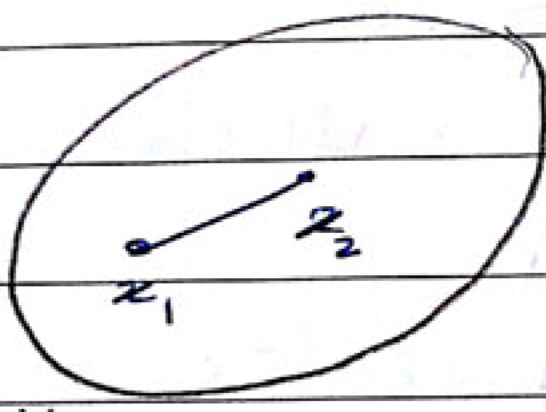
العدسة المحدبة :

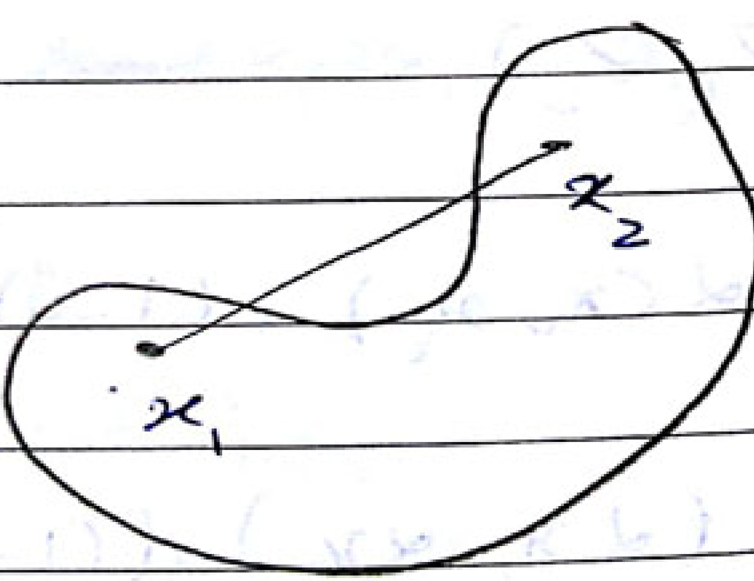


العدسة المقعرة :



المجموعة المحدبة :





غير محدبة.
لأنه يوجد قطعة مستقيمة لا تقع ضمن
المجموعة

ليكن E فضاء خطي : $\$ \subseteq E$

$\$$ محدبة $\Leftrightarrow$ $\{\forall x, y \in \$ \Rightarrow \alpha x + (1-\alpha) y \in \$;\ 0 \leq \alpha \leq 1\}$

مثال :

ليكن لدينا الفضاء الخطي $\mathbb{R}^2$ ولتكن $\$ \subseteq \mathbb{R}^2$ بحيث يكون :

$\$ \subseteq \mathbb{R}^2 : \$ = \{x = (x_1, x_2) : x_2 \geq |x_1|\}$

اثبت أن المجموعة $\$$ هي مجموعة محدبة.

الحل :

$x, y \in \$: x \neq y \ , x = (x_1, x_2)$

$y = (y_1, y_2)$

ولنثبت : $Z = \alpha x + (1-\alpha) y \in \$$

$Z = (Z_1, Z_2)$

$Z = (Z_1, Z_2) = \alpha (x_1, x_2) + (1-\alpha)(y_1, y_2)$

$= (\alpha x_1, \alpha x_2) + ((1-\alpha) y_1, (1-\alpha) y_2)$

$= [\underbrace{\alpha x_1 + (1-\alpha) y_1}_{Z_1}, \underbrace{\alpha x_2 + (1-\alpha) y_2}_{Z_2}]$

نريد تحقق أن : $Z_2 \geq |Z_1|$

أي نريد برهان أن:

$$|\alpha x_2 + (1-\alpha) y_2| \geq |\alpha x_1 + (1-\alpha) y_1|$$

$$\alpha x_2 + (1-\alpha) y_2 \geq \alpha |x_1| + (1-\alpha) y_1$$

$$\geq |\alpha x_1| + |(1-\alpha) y_1|$$

$$\geq |\alpha x_1 + (1-\alpha) y_1|$$

$$\Rightarrow z \in S$$

مثال: س.د لتكن لدينا الفضاء $\mathbb{R}^3$:

لتكن لدينا $S \subseteq \mathbb{R}^3$ حيث:

$$S = \{x : x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 5\}$$

سبق صنفنا

$$\forall z_1, z_2 \in S$$

$$z = \alpha z_1 + (1-\alpha) z_2$$

$$= \alpha (x_1 + 3x_2 - x_3) + (1-\alpha)(x_1' + 3x_2' - x_3')$$

$= |\alpha x$

التركيب الخطي للمتجهات

ليكن E فضاء متجهي (عناصره متجهات)

ولتكن $X_1, X_2, \dots, X_n \in E$

نقول عن المتجه $X \in E$ تركيب خطي إذا كان

$$X = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i X_i \quad , \quad \begin{cases} \lambda_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{cases}$$

أي الفضاء المتجهي هو الذي يتحقق فيه :
أي متجه يمكن كتابته كتركيب خطي لعدد من المتجهات.

نظرية : ليكن E فضاء خطي و $S \subset E$ — 15 علامة

S محدب $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \forall x_i \in S, \ i = 1:n ; \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \in S ; \\ ; \ 0 \leq \lambda_i \leq 1 , \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ نأخذ

سهلة

ملاحظات :

صفحة 205 فيها سؤال امتحاني .

من الصفحة 228 إلى 262 مسائل مهمة .

تمرين صفحة 263 سؤال دورة .