المعادلات التفاضلية 1

الدكتور : خليل يحيى

المحاضرة : التاسعة

التاريخ : ٧/١٢/٢٠١٦

إعداد : محمد شهلا & خالد الشعار

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

قام الأستاذ عبد الله المليح بإعطاء هذه المحاضرة بدلاً من الدكتور خليل يحيى ، وقد بدأ محاضرتنا هذه بمراجعة مختصرة لأفكار المحاضرة السابقة وحل تمارين الوظيفة ، لنبدأ:

مثال :

لتكن لدينا مجموعة التوابع:

$$y_1 = 1\ ,\ \ y_2 = x\ ,\ \ y_3 = x^2\ ,\ \ y_4 = x^3$$

لدراسة استقلالية هذه التوابع نستخدم معين رونسكي:

$$w(n) = w[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (1)(1)(2)(6) = 12 \neq 0 \Rightarrow \text{التوابع مستقلة خطياً}$$

تذكرة:

إذا كان لدينا مصفوفة مثلثية سواء كانت عليا أو دنيا فمحددها يساوي جداء عناصر قطرها الرئيسي.

مثال آخر: ادرس استقلالية التوابع:

$$y_1 = e^x\ ,\ \ y_2 = e^{2x}\ ,\ \ y_3 = e^{3x}$$

$$w(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}$$

بإخراج e^x من العمود الأول و e^{2x} من العمود الثاني و e^{3x} من العمود الثالث:

$$w(y_1, y_2, y_3) = e^{x+2x+3x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} \neq 0\ \Rightarrow \text{التوابع مستقلة خطياً}$$

تذكرة:

* إذا كان التابع $y_1(x)$ حلاً للمعادلة الخطية المتجانسة:

$$\boxed{y^n + P_1(x).y^{(n-1)} + P_2(x).y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}(x).y' + P_n(x).y = 0} \dots (1)$$

فإن: $c.y_1(x)$ ، يكون هو أيضاً حلاً لها حيث c ثابت اختياري.

* إذا كان التابعان $y_1(x)$ و $y_2(x)$ حلين للمعادلة التفاضلية (1) ،

فإن: $y = y_1 + y_2$ هو أيضاً حل للمعادلة التفاضلية (1).

* وللعموم إذا كانت التوابع: $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ حلولاً للمعادلة (1) ،

فإنَّ تابع التركيب الخطي لها:

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i.y_i = c_1.y_1 + c_2.y_2 + \cdots + c_n.y_n$$

يمثّل حلاً للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (1) ، حيث: c_i ثوابت اختيارية.

وهنا انتهت مراجعتنا لأفكار المحاضرة السابقة.

حل تمارين الوظيفة :

في هذه المحاضرة قام الأستاذ عبد الله المليح بحل تمرينا الوظيفة من المحاضرة السابقة ، ولكنا كنا قد أثبتنا حلّهما في المحاضرة السابقة ذاتها فليرجع إليها.

والآن سننتقل إلى فكرة نظرية جديدة:

المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة n ذات الأمثال الثابتة

إنَّ الشكل العام لهذا النوع من المعادلات هو:

$$L(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \dots (1)$$

حيث: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ أعداد حقيقية.

وإنَّ الحلول الخاصة لهذه المعادلة (1) تأخذ الشكل: $y = e^{\lambda x}$

حيث: λ هو ثابت حقيقي مجهول.

وبما أنَّ $e^{\lambda x}$ حل للمعادلة فإنه سيحقق هو ومشتقاتها هذه المعادلة..

نحسب المشتقات:

$$y' = \lambda e^{\lambda x} \ , y'' = \lambda^{2} . e^{\lambda x} , y''' = \lambda^{3} . e^{\lambda x} , \dots , y^{(n)} = \lambda^{n} . e^{\lambda x}$$

نعوض في (1) :

$$a_0 \lambda^{n} . e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} . e^{\lambda x} + a_2 \lambda^{n-2} . e^{\lambda x} + \dots + a_{n-1} \lambda e^{\lambda x} + a_n . e^{\lambda x} = 0$$

بإخراج $e^{\lambda x}$ عامل مشترك:

$$\Rightarrow e^{\lambda x} \left[a_0 \lambda^{n} + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n . \lambda \right] = 0 \dots (2)$$

نقسّم الطرفين على $e^{\lambda x}$ فنحصل على:

$$a_0 \lambda^{n} + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n . \lambda = 0$$

ونسمي هذه المعادلة الأخيرة بالمعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية ذات الأمثال الثابتة (1).

إن هذه المعادلة تلعب دوراً أساسياً ومهمّاً في تعيين الحلول الخاصة للمعادلة التفاضلية المتجانسة (1)

ونرى ذلك من خلال إيجاد جذور هذه المعادلة ونميّز الحالات التالية:

الحالة الأولى : جميع جذور المعادلة المميزة حقيقية ومختلفة:

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \dots \neq \lambda_n$$

عندئذٍ ستكون التوابع:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} , y_2 = e^{\lambda_2 x} , \dots , y_n = e^{\lambda_n x}$$

جملة حلول أساسية وسيكون الحل العام هو :

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i . y_i = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

وبالمثال يتضح المقال ☺

مثال : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{y''' - y' = 0}$$

الحل: لإيجاد الحل العام نفرض الحلول الخاصة من الشكل:

$$y = e^{\lambda x}$$

حيث أنها معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثالثة ذات أمثال ثابتة..

$$\Rightarrow \; y' = \lambda e^{\lambda x} \quad , \qquad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \, , \qquad y''' = \lambda^3 e^{\lambda x}$$

نعوض في المعادلة:

$$\Rightarrow \; \lambda^3 e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} = 0$$

$$\Rightarrow e^{\lambda x}[\lambda^3 - \lambda] = 0 \;\; \overset{e^{\lambda x} \neq 0}{\Rightarrow} \;\; [\lambda^3 - \lambda] = 0$$ وهي المعادلة المميزة

نكتبها بالشكل: $\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \;\; , \;\; \lambda_2 = -1 \;\; , \;\; \lambda_3 = 0$$

وهي جذور حقيقية مختلفة (الحالة الأولى) ، وبالتالي تكون الحلول الخاصة (جملة الحلول الأساسية) هي:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{x} \; , \; y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{-x} \; , \; y_3 = e^{\lambda_3 x} = e^{(0)x} = 1$$

وبالتالي فالحل العام المطلوب هو:

$$\boxed{y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3}$$

أما باقي الحالات فنتابعها في المحاضرة القادمة بإذن الله ☺

انتهت المحاضرة ..

" ليس من جوهر الرياضيات الاهتمام بأفكار العدد أو الكم

إنَّ الرياضيات التي يجب علينا بناؤها هي رياضيات العقل البشري "

جورج بول

☺ لا تنسونا من صالح دعواتكم ☺