مبادى الإحصاء والاحتمالات

الدكتور: احمد يونسو

المحاضرة : الرابعة عشرة

التاريخ : ٢٠١٦/١١/٢٨

إعداد : زهرة + شهيناز

محاضرة 28/11/2016 م (14)

طالبان يتقدمان إلى الامتحان فإذا كان احتمال نجاح الأول $\frac{1}{2}$ واحتمال نجاح الثاني $\frac{1}{3}$ المطلوب:

1) أوجد احتمال نجاحهما معاً.

2) أوجد احتمال نجاح واحد على الأقل.

الحل.

A الحدث الدال على نجاح الأول

B " " على نجاح الثاني

$$p(A)=\frac{1}{2} \quad , \quad p(B)=\frac{1}{3}$$

1) الاحتمال المطلوب

$$p(A\cap B) \underset{\text{الاستقلال}}{=} p(A).p(B)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

2) الاحتمال المطلوب

$$p(A\cup B) = p(A)+p(B) - p(A\cap B)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

مبرهنة:

إذا كانت A, B حدثين مستقلين فإن

أ) $\bar{A}$ و B مستقلان

ب) A , $\bar{B}$ مستقلان

ج) $\bar{A}$, $\bar{B}$ مستقلان أيضاً

$$\boxed{\bar{A} = A' = A^c}$$

الأثبات:

1) $p(A'\cap B) = p(\bar{A}\cup B) = 1 - p(A\cup B)$ دومورغان

$= 1 - [p(A) + p(B) - p(A\cap B)]$

$= 1 - p(A) - p(B) + p(A).p(B)$

$= p(\bar{A}) - (1 - p(A)).p(B)$

$\bar{B} = B'$

$= p(\bar{A}) - p(A).p(B)$

$= p(\bar{A})(1 - p(B)) = p(\bar{A}).p(B)$

2) لنثبت الآن أنه $A, \bar{B}$ مستقلان

$p(\bar{B}/A) = p_A(\bar{B}) = 1 - p_A(B)$ حيث $p(A) \neq 0$

$= 1 - p(B/A)$

$= 1 - p(B) = p(\bar{B})$

3) بنفس الطريقة أنه $\bar{A}, B$ مستقلان

$p(\bar{A}/B) = 1 - p(A/B)$ حيث $p(B) \neq 0$

$= 1 - p(A) = p(\bar{A})$

(2)

استقلال عدة أحداث.

مثال: إذا كان لدينا ثلاث أحداث A ، B ، C متعلقات بنفس التجربة واحدة عندئذ تكون الأحداث الثلاث مستقلة إذا تحقق الشرطان:

١- الأحداث A ، B ، C مستقلات مثنى مثنى

٢- $P(A\cap B\cap C) = P(A).P(B).P(C)$

وبالطريقة ذاتها يتم تعريف استقلال أربعة أحداث:

1) كل ثلاثة تؤلف ثلاثية أحداث مستقلة

2) احتمال تقاطع الأحداث الأربعة يساوي جداء احتمالاتها وهكذا نعرف استقلال n حدثاً ولتكن:

$$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$$

* مثال: تكون الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مستقلة إذا تحقق الشرط

1) كل متتالية من الأحداث مؤلفة من $n-1$ حدثاً تكون مستقلة

2) $P(A_1\cap \ldots\cap A_n) = P(A_1)\ldots P(A_n)$

مبرهنة:

إذا كانت A, B, C ثلاثة أحداث مستقلة فإن متمماتها $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ تكون مستقلة

الإثبات:

الأحداث $\bar{A}$ ، $\bar{B}$ ، $\bar{C}$ مستقلة مثنى مثنى لأن A ، B ، C مستقلة مثنى مثنى

$$P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}) = P(\overline{A\cup B\cup C})$$
$$= 1 - P(A\cup B\cup C)$$
$$= 1 - P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)$$

$$= 1 - p(A) - p(B) - p(C) + p(A)\,p(B) + p(A).p(C)$$
$$+ p(\bar{B})\,p(\bar{C}) - p(\bar{A}).p(B).p(C)$$

$$= p(\bar{A}) - p(B)\,(1 - p(A)) - p(C)(1 - p(A)) + p(B).p(C)$$
$$(1 - p(A))$$
$$= p(\bar{A}) - p(\bar{B})\,p(\bar{A}) - p(C).p(A) + p(\bar{B}).\,p(\bar{C}).p(\bar{A})$$
$$= p(\bar{A})\,p(\bar{B}) - p(\bar{A})\,p(B).p(C)$$
$$= p(\bar{A})\,p(\bar{B})\,(1 - p(C))$$
$$= p(\bar{A})\,p(\bar{B})\,p(\bar{C})$$

مثال

التجربة إلقاء قطعة نقود متزنة مرتين:

A حدث ظهور صورة في الرمية الأولى

B // // // // الثانية

C // // // واحدة في الرميتين

والمطلوب:

ادرس استقلال هذه الأحداث.

الحل ... $\Omega = \{HH, TH, HT, TT\}$

$$|\Omega| = 2^2 = 4$$

$A = \{HH, HT\}$, $B = \{HH, TH\}$, $C = \{HT, TH\}$

$$p(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$p(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$p(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Alyesser

(5)

$p(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $p(A \cap C) = \frac{1}{4}$, $p(B \cap C) = \frac{1}{4}$

وأخيراً:

$$\frac{1}{4} = p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = p(A \cap C) = p(A) \cdot p(C) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = p(B \cap C) = p(B) \cdot p(C) = \frac{1}{4}$$

أي أن الأحداث A و B و C مستقلة مثنى مثنى

بينما:

$$p(A \cap B \cap C) = p(\emptyset) = 0$$

$$p(A) \cdot p(B) \cdot p(C) = \frac{1}{8}$$

وبالتالي الأحداث A, B, C غير مستقلة

التكرارات المستقلة:

إذا قمنا بتكرار التجربة تحت الشروط نفسها بحيث يبقى الاحتمال ثابتاً من تكرار إلى الآخر لذلك نقول أننا قمنا بتكرارات مستقلة فإذا كانت عدد مرات تكرار تجربة يساوي n سلباً في كل محاولة (تكرار) النتائج الموافقة (الحدث الذي يقع) التكرار نحصل على متتالية من الأحداث عدد عددها n من الشكل $A_1, A_2 \dots A_n \Leftarrow A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_i$ بحيث يكون A_i يمثل نتيجة المحاولة أو رقم التكرار حيث $(i = 1, \dots, n)$ وفي هذه الحالة يكون:

$$p(A_1, A_2, \dots, A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2) \dots p(A_n)$$

(5)

مثال:

إذا كان احتمال مولود ذكراً يساوي $\frac{1}{2}$ فما الاحتمال أن نجد في أسرة لديها ثلاث أطفال.

1) أن يكون الثلاثة أطفال ذكور

2) أن يكون على الأقل ذكراً.

الحل:

لنرمز لـ G لحدث تكون المولود أنثى $p(G)=\frac{1}{2}$

ونرمز لـ B لحدث تكون الولادة ذكراً $p(B)=\frac{1}{2}$

$$A_1 , A_2 , A_3$$

$$A_1=\{B\} \quad , A_2=\{B\} \quad , A_3=\{B\}$$

$$p(B,B,B)=p(B).p(B).p(B)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

يكن لدينا الحدث الدال على الذكور كون الولادات الثلاث إناث إلي

$$p(G)=p(GGG)=p(G).p(G).p(G)$$

* ونرمز لـ D للحدث المطلوب. عندئذ:

$$p(D)=1-p(G)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

تجزئة الأحداث

لتكن $H_1, H_2, \ldots\ldots, H_n$ متتالية من الأحداث في فضاء احتمالي $(\Omega, \mathcal{A}, p)$

نقول عن هذه الأحداث أنها تجزئة لـ Ω: إذا تحقق ما يلي:

1- $p(H_i)>0 \quad \forall i=1,\ldots,n$

2- $H_1 \cup H_2 \cup \ldots\ldots \cup H_n=\Omega$

(6)

3- الأحداث $H_1, \dots, H_n$ متنافية مثنى مثنى أي أن

$$H_i \cap H_j = \phi \qquad \forall i \neq j$$

نتائج

1) إذا كانت $H_1 \dots H_n$ تجزئة لـ Ω فإنه:

$$p(H_1) + p(H_2) + \dots + p(H_n) = 1$$

2) أي تجزئة $H_1, \dots, H_n$ لـ Ω تؤدي إلى تجزئة أي حدث A متعلق بالتجزئة التي فضاء إمكاناتها Ω

$$p(A) = p(A \cap \Omega) \quad , \quad \Omega = \bigcup_{i=1}^{n} H_i$$

التوزيع

$$= p\left[A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} H_i\right)\right]$$

$$= p\left[\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap H_i)\right]$$

بحسب قاعدة الضرب...

$$= \sum_{i=1}^{n} p(A \cap H_i)$$

الاحتمال

$$= \sum_{i=1}^{n} p(H_i) . p(A/H_i)$$

قانون الاحتمال الكلي

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i)\, p(A/H_i)$$

اكتب قانون الاحتمال الكلي وأثبت صحته

قانون الاحتمال الكلي:

لتكن $H_1 \dots H_n$ تجزئة لـ Ω ، وليكن A حدثاً "متعلقاً" بالتجزئة التي فضاء إمكاناتها Ω عندئذٍ

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i)\, p(A/H_i)$$

{ انتهت المحاضرة }

7

Alyesser