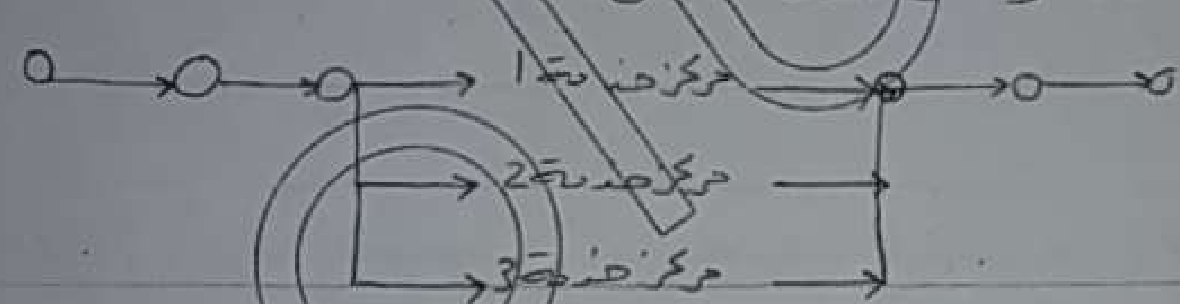
## quee Theory نظرية الأرتال.

تهدف نظرية الأرتال إلى جعل الفترة الزمنية للانتظار مقياساً مادياً لتكلفة الانتظار ودراسته وإيجاد توازن بين تكلفة الانتظار وتكلفة اتخاذ القرار لتقليل فترة الانتظار.

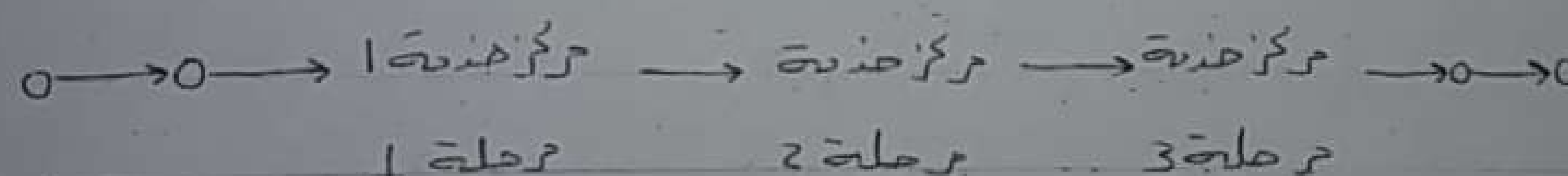
- من الأنواع الشائعة وجود عدة أرتال وعدة مراكز خدمة لذلك لن ندرس هذا النوع، سندرس الحالة التي يوجد فيها رتل واحد وفق الحالات التالية:

1) النمط الأول: مركز خدمة واحد ورتل واحد ويمكن تمثيله بيانياً كالتالي:

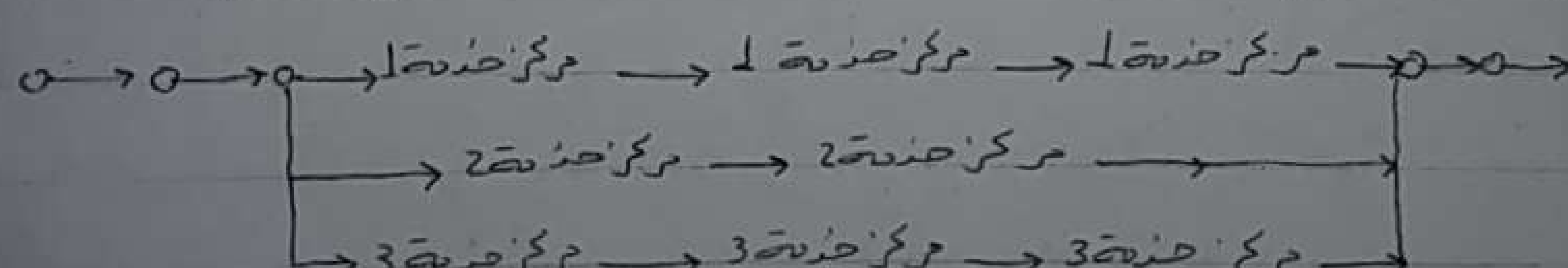

2) النمط الثاني: عدة مراكز خدمة ورتل واحد




3) النمط الثالث: عدة مراكز خدمة متتالية ورتل واحد:




4) النمط الرابع: عدة مراكز خدمة بمراحل متعددة ورتل واحد:



المناقشة الرياضية الواقعية لحل مسائل الأرتال :

لنفرض ان الحدودية $p_n(t)$ تعبّر عن احتمال أن ينتظر $n$ زبون حيث $n \geq 0$ وهي حدودية تابعة للزمن $t$.

نريد أن نوجد علاقة بين الحدوديات $p_0(t), p_1(t), \ldots, p_n(t)$

نعرض : $n$ : عدد الزبائن في النظام .

$t$ : الوحدة الزمنية .

$h$ : وحدة زمنية صغيرة جداً .

$\lambda$ : معدل وصول الزبائن إلى مركز الخدمة خلال واحدة الزمن .

$u$ : معدل الخدمة التي تقدمها مركز الخدمة للزبائن خلال واحدة الزمن .

في الحقيقة ، عند ملاحظة أرتال الانتظار فإننا عادةً نحتاج إلى وقت كبير وفترات زمنية متتالية ، وبالتالي نفترض دوماً أن $t \longrightarrow \infty$

هدف المسألة هو كيف أجعل فترة انتظار الزبائن وحتى يكون زمن انتظار الزبون أقل ما يمكن يجب أن يكون احتمال انتظاره أصغر ما يمكن أي أن تكون $p_n(t)$ أصغر ما يمكن مهما تغيرت $t$ . أي يجب ان يكون :

$$\frac{d\,p_n(t)}{dt} = 0 \qquad \text{عندما } t \longrightarrow \infty$$

سنستخدم $P_n$ بدلاً من $p_n(t)$ للسهولة فقط .

وعملياً هذه الفرضيات تقودنا إلى حالة الاستقرار ( الثبات ) .

والوجد الآن علاقة تنا مزل كثيرة الحدود $p_n(t)$ بالنسبة للزمن كما يلي :

نجري تغيراً طفيفاً جداً $h$ على الزمن $t$ ، عندئذٍ يكون الحالات الآتية :

① $n$ زبون في النظام في اللحظة $t+h$ :

٢ـ لم يدخل أو يخرج أي زبون :

$$(1-hu)(1-h\lambda)\,p_n(t) \Leftarrow \begin{cases} \text{لم يدخل احتمالها } & 1-h\lambda \\ \text{لم يخرج احتمالها } & 1-hu \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1-h\lambda-hu+h^2u\lambda)\,p_n(t)$$

بما أن $h$ صغيرة جداً يمكن اعتبار $h^2 \to 0 \Leftarrow$

$$(1 - h\lambda - hu + \underbrace{h^2 u\lambda}_{\to 0})\, p_n(t)$$

$$\Rightarrow (1 - h(u+\lambda))\, p_n(t)$$

$$\Rightarrow p_n(t) - h(u+\lambda)\, p_n(t)$$

ب- دخل زبون وخرج زبون:

$$(\lambda h)(u h)\, p_n(t) = h^2 \lambda u\, p_n(t) \Leftarrow \begin{cases} \lambda h & \text{دخول واحد احتماله:} \\ u h & \text{خروج واحد احتماله:} \end{cases}$$

نهمل $h^2 \to 0 \Leftarrow$ $\quad h^2 \lambda u\, p_n(t) = 0 \quad : \quad n \geq 2$.

② $n-1$ زبون في اللحظة $t$

لنحسب احتمال عدد الزبائن $n$ في اللحظة $t+h$.

أ. احتمال دخول زبون وخروج زبون.

ب. احتمال عدم دخول أو خروج أي زبون.

إذا دخل زبون وخرج زبون أو لم يدخل أي زبون فإن عدد الزبائن سيبقى $n-1$ وبالتالي هذه الحالة نفس الحالة السابقة عندما كان عدد الزبائن $n$ وبقي $n$.

أما:

عدد الزبائن $n$ في اللحظة $t+h$ (معناها دخل زبون ولم يخرج أحد)

$$(\lambda h)(1 - u h)\, p_{n-1}(t) = \Leftarrow \begin{cases} \lambda h & \text{دخل واحد احتماله:} \\ 1 - u h & \text{لم يخرج أحد احتماله:} \end{cases}$$

$$= (\lambda h - \underbrace{u\lambda h^2}_{\to 0})\, p_{n-1}(t) \Rightarrow \lambda h\, p_{n-1}(t).$$

③ من أجل $n+1$ زبون في اللحظة $t+h$ : لنناقش حالة $n$ زبون

- عدد الزبائن $n$ في اللحظة $t+h$ (معناها لم يدخل أحد وخرج واحد).

لم يصل أحد احتماله : $1 - \lambda h$
خرج واحد احتماله : $u h$

$$\Rightarrow (u h)(1-\lambda h)\, p_{n+1}(t) = (u h - \underbrace{u \lambda h^2}_{\to 0})\, p_{n+1}(t) \Rightarrow u h\, p_{n+1}(t)$$

- بقية الحالات احتمالها يسعى إلى الصفر : $o(h) \to 0$

وبالتالي يصبح بشكل التالي :

$$p_n(t+h) = \lambda h\, p_{n-1}(t) + p_n(t) - h(u+\lambda)\, p_n(t) + u h\, p_{n+1}(t) + \underbrace{o(h)}_{\to 0}$$

ننقل الحد $p_n(t)$ للطرف الأيسر ثم نقسم على $h$ فنحصل على :

$$\frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} = \lambda\, p_{n-1}(t) - (u+\lambda)\, p_n(t) + u\, p_{n+1}(t)$$

والآن نجعل $h \to 0$ نحصل على مشتق الحدود $p_n(t)$ بالنسبة للزمن

$$\frac{d\,p_n(t)}{dt} = \lambda\, p_{n-1}(t) - (u+\lambda)\, p_n(t) + u\, p_{n+1}(t)$$

وبما أن حالة الاستقرار المعتمدة هنا : $\frac{d\,p_n(t)}{dt} = 0$

$$\lambda\, p_{n-1}(t) - (\lambda+u)\, p_n(t) + u\, p_{n+1}(t) = 0$$

مناقشة النمط الأول : قناة خدمة واحدة

* وصلنا إلى العلاقة التالية التي تربط احتمالات انتظار الزبائن ببعضها

$$\lambda\, p_{n-1}(t) - (\lambda+u)\, p_n(t) + u\, p_{n+1}(t) = 0 \quad ; \ n \geq 0$$

ومن خلال هذه العلاقة يمكننا الوصول إلى علاقة تكرارية أبسط منها وذلك

بتعويض قيم $n$ : $\quad n = 0 : \quad \lambda \underbrace{p_{-1}(t)}_{\text{هذا الحد غير موجود}} - (u+\lambda)\, p_0(t) + u\, p_1(t) = 0$

$$\Rightarrow u\, p_1(t) = u\, p_0(t) + \lambda\, p_0(t)$$

لكن عندما $n = 0$ هذا يعني أننا في الحالة الابتدائية التالية التي لا يكون قد

وصل فيها بعد أي زبون، وبالتالي الخدمة لم تبدأ بعد، أي يمكن أن نقول

إن $u \longrightarrow 0$ عندما لا يكون هناك أي زبون أي $u p_0(t) \longrightarrow 0$

فيصبح لدينا: $u p_1(t) = \lambda p_0(t) \Rightarrow \boxed{p_1(t) = \frac{\lambda}{u} p_0(t)}$ — ①

عندما $n=1$ : $\lambda p_0(t) - (u+\lambda) p_1(t) + u p_2(t) = 0$

نعوض ① هنا فنجد:

$$\lambda p_0(t) - (u+\lambda) \frac{\lambda}{u} p_0(t) + u p_2(t) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda p_0(t) - \lambda p_0(t) - \frac{\lambda^2}{u} p_0(t) + u p_2(t) = 0$$

$$\Rightarrow p_2(t) = \frac{\lambda^2}{u^2} p_0(t) \Rightarrow \boxed{p_2(t) = \left(\frac{\lambda}{u}\right)^2 p_0(t)} \text{ — ②}$$

عندما $n=2$ : $\lambda p_1(t) - (u+\lambda) p_2(t) + u p_3(t) = 0$

نعوض ① و ② هنا فنجد:

$$\lambda \left(\frac{\lambda}{u}\right) p_0(t) - (u+\lambda)\left(\frac{\lambda}{u}\right)^2 p_0(t) + u p_3(t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda^2}{u} p_0(t) - \frac{\lambda^2}{u} p_0(t) - \frac{\lambda^3}{u^2} p_0(t) + u p_3(t) = 0$$

$$\Rightarrow p_3(t) = \frac{\lambda^3}{u^3} p_0(t) \Rightarrow \boxed{p_3(t) = \left(\frac{\lambda}{u}\right)^3 p_0(t)} \text{ — ③}$$

وبنفس الطريقة من أجل $n$ يكون:

$$p_n(t) = \left(\frac{\lambda}{u}\right)^n p_0(t)$$

نسمي $\frac{\lambda}{u}$ بـ $\varphi$ $\Leftarrow$ $P_n = \varphi^n P_0$

بما أن $P_0 , P_1 , P_2 , \ldots\ P_n$ هي قيم احتمالية خلال فترات زمنية فإن: $0 \leq P_n(t) \leq 1$ ,

ويكون: $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$

وبتعويض قيمة $P_n(t)$ نجد أن:

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i P_0(t) = 1 \Rightarrow P_0(t) \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}} \quad *$$

لنبحث المتسلسلة $\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i$ تساوي:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = 1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \dots$$

هذه المتسلسلة هندسية حدها الأول 1 و $\frac{\lambda}{\mu}$ هو أساس المتتالية.
تكون متقاربة إذا كانت $0 < \frac{\lambda}{\mu} < 1$

- في المسائل التطبيقية يكون أن يكون المقدار $\frac{\lambda}{\mu}$ أصغر تماماً من الواحد وأكبر من الصفر.

فإن مجموع المتسلسلة

$$S = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$$

نعوض $\frac{\lambda}{\mu} = \varphi$ ونعوض في العلاقة *

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i} = \frac{1}{\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \varphi \Rightarrow \boxed{P_0 = 1 - \varphi}$$

نسمي $\frac{\lambda}{\mu}$ كثافة الحركة (نسبة المنفعة). وهي تمثل نسبة معدل وصول الزبائن إلى معدل خدمة الزبائن.

بشكل عام أصبح لدينا: احتمال وجود $n$ وحدة في النظام في اللحظة $t+h$:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \varphi^n (1 - \varphi)$$

مناقشة:

نفرض أن $L$ عدد الوحدات المتوقعة في النظام:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \varphi^n (1-\varphi) = (1-\varphi) \sum_{n=0}^{\infty} n \varphi^n$$

لكن $\frac{\lambda}{\mu} = \varphi < 1$ عندئذ نوجد مجموع المتسلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \varphi^n = \varphi + 2\varphi + 3\varphi^3 + \dots = \frac{\varphi}{(1-\varphi)^2} \quad \text{(مجموع المتسلسلة)}$$

$$L = (1-\rho)\frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$\Rightarrow L = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\frac{\mu-\lambda}{\mu}} \Rightarrow L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

- نفرض $W$ الوقت المستغرق بالنظام ويساوي عدد الزبائن المتوقع على عدد معدل الوصول:

$$\Rightarrow W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\frac{\lambda}{\mu-\lambda}}{\lambda} \Rightarrow W = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

- نفرض $L_q$ عدد الوحدات (الزبائن) المتوقعة في صف الانتظار:

$$L_q = \frac{\lambda}{\mu} L \Rightarrow L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

- نفرض $W_q$ الوقت المتوقع المستغرق في صف الانتظار:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \Rightarrow W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

مثال: ورشة إصلاح سيارات بمعدل وصول سيارتين في الساعة وذلك حسب توزيع بواسون، متوسط الخدمة 20 دقيقة وفق التوزيع الأسي، تكلفة انتظار السيارة 200 ل.س في الساعة.

احسب ما يلي:

1. متوسط عدد السيارات المتوقعة في الورشة.
2. متوسط الوقت المستغرق في الورشة في كل سيارة.
3. متوسط طول صف الانتظار.
4. الكلفة الكلية للانتظار في الورشة خلال 8 ساعات.

الحل:

معدل الوصول $\lambda = 2$ ، معدل الخدمة $\mu = \frac{60}{20} = 3$

1) عدد السيارات المتوقعة في الورشة :

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{2}{3 - 2} = 2$$

2) متوسط الوقت المستغرق لكل سيارة في الورشة :

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{3 - 2} = 1$$

3) متوسط طول صف الانتظار :

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{4}{3(3 - 2)} = \frac{4}{3} = 1.7$$

4) الكلفة الكلية للانتظار في الرحعة خلال 8 ساعات يعطى بما يلي :

عدد السيارات الكلي في الورشة X وقت الانتظار لكل سيارة X عدد الساعات X تكلفة الانتظار

$$C = L \times W_q \times 8 \times 200 \Rightarrow$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{2}{3(3 - 2)} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow C = 2 \times \frac{2}{3} \times 8 \times 200 = 2133$$

مثال 2 : لدى أحد المكاتب خدمة اتصالات خط هاتف واحد ،

يصل الزبائن إلى هذا المكتب عشوائياً ، بمتوسط زمني 8 دقائق بين

زبون وآخر ( لكل مستفيد ) ، الوقت المستغرق للمكالمة يتبع متوسط 5

دقائق وفق توزيع أسي ،

والمطلوب :

1- ما هو احتمال أن يكون الخط مشغول ؟

2- ما هو متوسط عدد الزبائن ( طول ) صف الانتظار ؟

الحل: كل 8 دقائق يصل زبون وبشكل عشوائي $\Rightarrow \lambda = \frac{1}{8}$

تنتهي فترة استخدام خط الهاتف بعد 5 دقائق فيكون معدل الخدمة $\mu = \frac{1}{5}$

1) احتمال أن يكون الخط مشغول:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{5}} \Rightarrow \rho = \frac{5}{8}$$

2) متوسط رتل الانتظار:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^2}{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)}$$

$$\Rightarrow L_q = \frac{\frac{1}{64}}{\frac{1}{25}-\frac{1}{40}} = \frac{1}{64}\cdot\frac{200}{3} = \frac{25}{24}$$

إذن فالعدد المتوقع في رتل الانتظار يساوي تقريباً الواحد.

انتهت المحاضرة

ملاحظة: الدكتور أعطى مقدمة عن نظرية الأرتال في المحاضرة 13 وأكمل في المحاضرة 14 وأعاد الشرح في المحاضرة 15 وفي نهاية المحاضرة 15 أعطى مقدمة لنظرية التوازم (Matching) حيث أن الدكتور يريد إعطاء نظرية الأرتال على أجزاء ويعطي معها نظرية التوازم، فأعدت ترتيب المحاضرات على النحو التالي:

دمجت ما أعطاه الدكتور عن نظرية الأرتال في المحاضرة 14 + 15 وسأكمل في المحاضرة 16 ثم أذكر نظرية التوازم بعدها.

ملاحظة 2: في المحاضرة 13، الرقم 3 في خانة الرسمة الأولى ليس له معنى والرقم 4-5 في خانة المصفوفة $D$ ليس له معنى / ركز الكوريكيز ☺ /

كتابة الطالبة:

سندس وصود.