Syria Math

التحليل 3

الدكتور: يحيى قطيش

المحاضرة : العشرون "الأخيرة"

التاريخ : ١٣/١٢/٢٠١٦

إعداد : نذير تيناوي

سنكمل في هذه المحاضرة بدراسة متسلسلات فورييه :

متسلسلات فورييه تؤخذ بالشكل :

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx + b_n sinnx)$$

مبرهنة : إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على المجال $]-\pi,\pi[$ و تحقق شروط ديركليه فإن متسلسلة فورييه لهذه الدالة تتقارب على كامل المجال $]-\pi,\pi[$ و يكون مجموعها :

١- مساوياً للدالة $f(x)$ داخل المجال $]-\pi,\pi[$

٢- مساوياً لـ $\frac{1}{2}\left(f(x_0+0)+f(x_0-0)\right)$ في كل نقطة x_0 تكون نقطة انقطاعاً

٣- مساوياً لـ $\frac{1}{2}\left(f(-\pi+0)+f(\pi-0)\right)$ في طرفي المجال $\pm\pi$

ملاحظة : إن حدود متسلسلة فورييه هي دوال دورية دورها 2π و عليه فإن تقارب المتسلسلة ضمن المجال $]-\pi,\pi[$ يقتضي تقاربها في كل نقطة $x+2\pi k$ حيث $x \in]-\pi,\pi[$

و إذا أخذنا المتسلسلة خارج المجال $]-\pi,\pi[$ فيجب أن تكون الدالة $f(x)$ محدودة خارج هذا المجال بصورة دورية دورها 2π. و طرفي المجال $x=\pi, x=-\pi$ نعتبرها نقاط انقطاع إذا كان $f(-\pi+0) \neq f(\pi-0)$.

مبرهنة : إذا كانت الدالة $f(x)$ زوجية ضمن المجال $]-a,a[$ أي $f(-x)=f(x) \forall x \in]-a,a[$ فإن :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

أما إذا كانت $\boldsymbol{f(x)}$ فردية ضمن المجال $]-\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}[$ أي $\boldsymbol{f(-x)=-f(x) \forall x \in]-a,a[}$

فإن :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

مثال : انشر في متسلسلة فورييه الدالة

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

على المجال $]-\pi, \pi[$

الحل : حسب دساتير أولر-فورييه :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)dx = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{(\pi - x)}_{u}\ cosnxdx$$

نطبق التكامل بالتجزئة :

$$u = \pi - x \Rightarrow du = -dx$$

$$dv = cosnx\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{n}sinnx$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\underbrace{\left[\frac{\pi - x}{n}sinnx\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{sinnx}_{\text{دالة فردية}}\,dx}_{=0} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnxdx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{(\pi - x)}_{u}\ sinnxdx$$

أيضاً بالتجزئة :

$$u = \pi - x \Rightarrow du = -dx$$

$$dv = sinnxdx \Rightarrow v = -\frac{1}{n}cosnx$$

$$b_n=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x-\pi}{n}cosnx\right]_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}cosnnxdx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[0-\left(-\frac{2\pi}{n}\underbrace{\cos(-n\pi)}_{\cos(-\theta)=cos\theta}\right)\right]-\frac{1}{2\pi n^2}\underbrace{[sinnx]_{-\pi}^{\pi}}_{=0}$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{1}{2\pi}.\frac{2\pi}{n}\cos(n\pi)$$

لكن نعلم أن $cosn\pi=(-1)^n$ و بالتالي/

$$b_n=\frac{(-1)^n}{n}$$

و بعد أن حددنا المعاملات نعوض في متسلسلة فورييه الدالة :

$$\frac{\pi-x}{2}=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left((0)\cos nx+\frac{(-1)^n}{n}sinnx\right)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}sinnx\right)$$

وذلك ضمن المجال $]-\pi,\pi[$ أما عند أطرف المجال فإن قيمة الدالة

$$f(-\pi)=\frac{\pi-(-\pi)}{2}=\pi$$

$$f(\pi)=\frac{\pi-\pi}{2}=0$$

أما قيمة المتسلسلة عند $\pm\pi$ فهي تساوي $\frac{\pi}{2}$ لأنه بالتعويض و علماً أن $\sin(\pm n\pi)=0$ نجد أن المتسلسلة تساوي $\frac{\pi}{2}$ لذا نكتب :

$$\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}sinnx\right)=\begin{cases}f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}: x\in]-\pi,\pi[\\ \frac{\pi}{2} \quad : x=\pm\pi\end{cases}$$

نطرح من الطرفين $\frac{\pi}{2}$ فنجد :

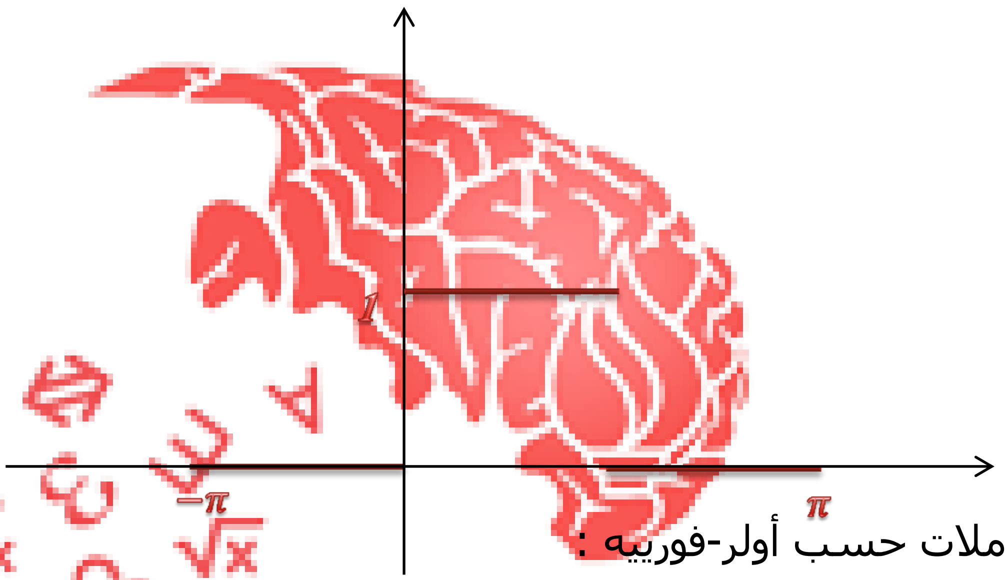
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}sinnx\right)=\begin{cases}f(x)=-\frac{x}{2}: x\in]-\pi,\pi[\\ 0 \quad : x=\pm\pi\end{cases}$$

مثال : لنأخذ الدالة f المعرفة على المجال $]-\pi,\pi[$ على النحو التالي:

$$f(x)=\begin{cases}0 & :-\pi<x<0\\ 1 & :0<x<a\\ 0 & :a<x<\pi\end{cases}$$

انشر $f(x)$ في متسلسلة فوريه

الحل: إن شروط ديركليه محققة على المجال $]-\pi,\pi[$ و يمكن نشر الدالة وفق فوريه



نوجد المعاملات حسب أولر-فوريه :

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}0dx+\int_{0}^{a}1dx+\int_{a}^{\pi}0dx\right)=\frac{a}{\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cosnxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}0cosnxdx+\int_{0}^{a}1.cosnxdx+\int_{a}^{\pi}0.cosnxdx\right)$$

$$a_n=\frac{1}{n\pi}\sin(na)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sinnxdx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0 sinnxdx + \int_{0}^{a} 1. sinnxdx + \int_{a}^{\pi} 0. sinnxdx\right)$$

$$b_n = \frac{1 - cosna}{n\pi}$$

نعوض في متسلسلة فورييه :

$$f(x) \sim \frac{a}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\pi}\sin(na)\, cosnx + \frac{1 - cosna}{n\pi} sinnx\right) \ : -\pi < x < \pi$$

و لنعالج نقاط الانقطاع :

$$x = \mp\pi$$

$$\frac{\big(f(-\pi+0) + f(\pi-0)\big)}{2} = 0$$

$$x = 0$$

$$\frac{\big(f(0+0) + f(0-0)\big)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x = a$$

$$\frac{\big(f(a+0) + f(a-0)\big)}{2} = 0$$

إذن يكون :

$$\frac{a}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\pi}\sin(na)\, cosnx + \frac{1 - cosna}{n\pi} sinnx\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} & : x = a, x = 0 \\ 0 & : x = \pm\pi \\ f(x) & -\pi < x < \pi \end{cases}$$

مثال : انشر في متسلسلة فورييه التابع $f(x) = x^2$ على المجال $]-\pi, \pi[$

الحل : إن الدالة المعطاة محققة لشروط ديركليه على المجال المذكور و هي فضلاً عن ذلك دالة زوجية :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^2}_{u}\,\underbrace{cosnx\ dx}_{dv} = \frac{4}{n^2}(-1)^n \quad \text{(تجزئة مرتين)}$$

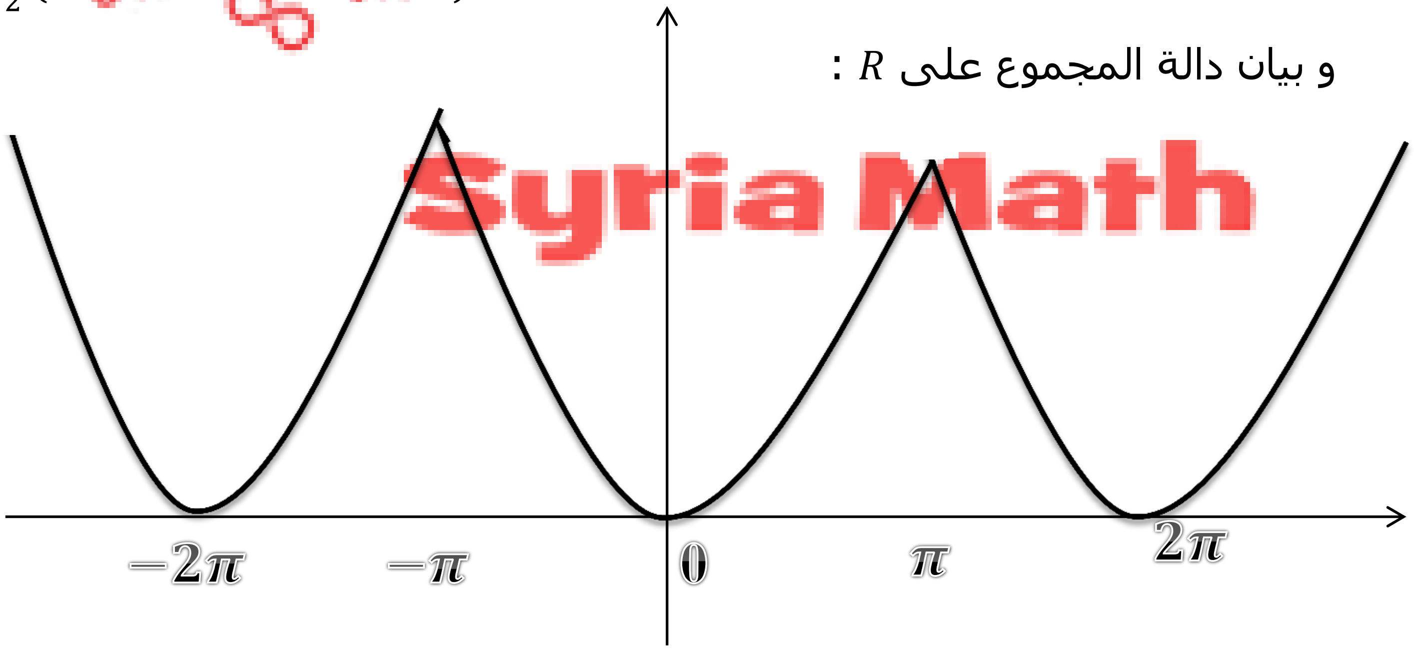
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^2 sinnx\, dx}_{\text{تابع فردي}} = 0$$

بالتعويض في متسلسلة فورييه :

$$f(x) = x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}cosnx$$

و ذلك عندما $-\pi < x < \pi$ أما عند الأطراف : $\frac{1}{2}\left(f(-\pi+0)+f(\pi-0)\right) = \pi^2$

و بيان دالة المجموع على R :



ملاحظة : يمكن استخدام متسلسلات فورييه في إيجاد مجاميع لمتسلسلات عددية

فمثلاً في التمرين الأخير لو وضعنا $x = 0$ في الطرفين و عزلنا المتسلسلة لنتج لدينا :

$$-\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \cdots$$

لنفرض أن :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots . + \frac{1}{n^2} + \cdots = \alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots = \beta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

و لنجمع حدود α كما يلي :

$$\alpha = \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \cdots\right)$$

نخرج *1/4* عامل مشترك من القوس الثاني :

$$\alpha = \beta + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots\right) = \beta + \frac{1}{4}\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}\alpha = \beta$$

و كان لدينا في البداية :

$$-1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \cdots = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$-\beta + \frac{1}{4}\alpha = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$-\frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{4}\alpha = -\frac{\pi^2}{12} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

بذلك تكون قد نكون أنهينا المحاضرة الأخيرة آملين أن نكون قد قدمنا لكم مادة مفيدة

و راجين الله تعالى أن يوفقكم في جميع المواد و أن يوفقنا في تطوير كل ما نقدمه لكم في سبيل

تطوير رياضياتنا .

نذير تيناوي

Syria Math

مع تحيات فريق سيريا ماث التطوعي ^_^