23/11/2016 (ج) المحاضرة 14

3 (P) تعيين القاعدة والمتدحرج (تحليلياً، هندسياً) والمركز الآني للدوران:

(P) سرعة أي نقطة بدلالة المركز الآني للدوران: $\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{IM}$

لكون A قطب $\vec{V}(A) = \vec{\omega} \wedge \vec{IA}$

نضرب الطرفين خارجياً بـ $\vec{\omega}$ $\vec{\omega} \wedge \vec{V}(A) = -\omega^2 \cdot \vec{IA}$

$$\Rightarrow \vec{IA} = -\frac{1}{\omega^2}(\vec{\omega} \wedge \vec{V}(A)) \Rightarrow \vec{AI} = \frac{1}{\omega^2}(\vec{\omega} \wedge \vec{V}(A))$$

القاعدة والمتدحرج تحليلياً:

- في جملة ثابتة: بفرض إحداثيات I هي: $I(x_1(I), y_1(I))$

ومنه:

$$\vec{AI} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{V}(A)}{\omega^2}$$ ← نسقط على الثابتة لنوجد القاعدة وعلى المتماسكة لنوجد المتدحرج

$$(x_1(I) - \overset{v.t}{x_A}, y_1(I) - \overset{0}{y_A}) = \frac{1}{\omega^2}\begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ v & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(I) - v.t = 0 \Longrightarrow x_1(I) = v.t = l.\ln tg\frac{\theta}{2} \\ y_1(I) - 0 = \frac{v}{\omega} = \frac{v}{\frac{v}{l}.\sin\theta} = \frac{l}{\sin\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} x_1(I) = l.\ln tg\frac{\theta}{2} \\ y_1(I) = \frac{l}{\sin\theta} \end{cases}\right\}$$ معادلات القاعدة

- على المتماسكة بفرض إحداثيات I هي: $I(x(I), y(I))$

ولكون A مبدأ جملة متماسكة وبالتالي إحداثياتها $(x(A), y(A)) = (0, 0)$

علماً أن:

$\vec{V}(A) = v.\vec{i}_1$
$\vec{i}_1 = \cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j}$

$\Rightarrow \vec{V}(A) = (v.\cos\theta, -v\sin\theta)$

$$(x(I)-0, y(I)-0) = \frac{1}{\omega^2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ v\cos\theta & -v\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$x(I) = \frac{v.\sin\theta}{\omega} = l$ ← كون معادلة تثبت أنها تساوي ثابت
تثبت معادلة المتدحرج وهي المستقيم
الموازي للمحور Ay

$y(I) = \frac{v.\cos\theta}{\omega}$ (غير ضرورية)

القاعدة والمتدحرج هندسياً:

نعلم منحى سرعة A وهو يوازي oy_1، لكن منحى سرعة B لا نعلمه
لذلك نطبق نظرية المساقط

$proj_{AB}\,\vec{V}(B) = proj_{AB}\,\vec{V}(A)$

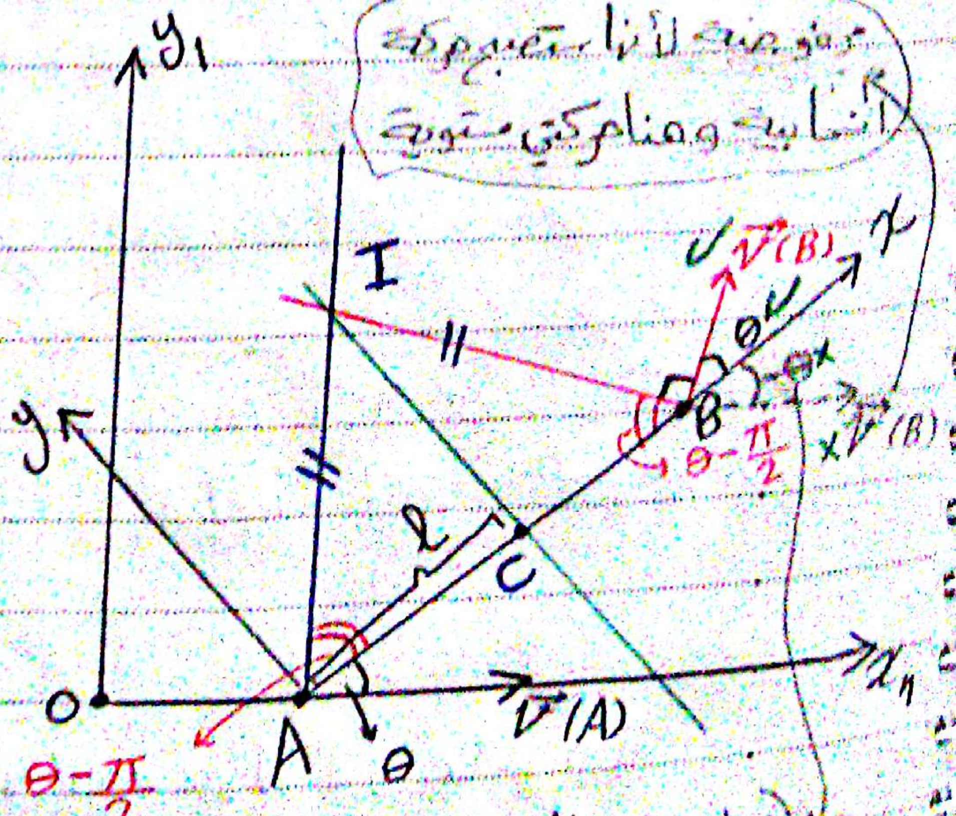
$\vec{AB}\cdot\vec{V}(A) = \vec{AB}\cdot\vec{V}(B)$

حدياً

$\cancel{|\vec{AB}|}\cdot\underbrace{\cancel{|\vec{V}(A)|}}_{=v \text{ من الفرض}}\cdot\cos\theta = \cancel{|\vec{AB}|}\cdot\underbrace{\cancel{|\vec{V}(B)|}}_{=v}\cdot\cos\varphi$

$\Rightarrow \cos\theta = \cos\varphi$

$\Rightarrow \varphi = \begin{cases} \theta & \text{إما، مقبولة} \\ -\theta & \text{أو، مرفوضة يعطي الحركة انسحابية} \end{cases}$



(رفضت الـ $-\theta$ لأنه سيصبح لدي السرعتين $\vec{V}(B)$، $\vec{V}(A)$ متوازيتين ومتساويتين ← المركز يقع في الـ ∞ وهذا مرفوض وبالتالي نأخذ θ)

ب) وبالتالي نرفع عامود من سرعة A وعامود من سرعة B، تلاقي العامودين هو المركز الآني للدوران هندسياً

Subject : $\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}-\theta$ لكون زوايا القاعدة متساوية

فالمثلث BIA مثلث متساوي الساقين

القاعدة : في الجملة الثابتة:
$$x_1(I)=x(A)=v.t$$

$$y_1(I)=AI=\frac{l}{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)}=\frac{l}{\sin\theta}$$

المتدحرج : في الجملة المتحركة

$$x(I)=AC=l$$

$$y(I)=CI=l\,tg(\frac{\pi}{2}-\theta)$$

أو : $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{l}{AI}$

4 : إيجاد تسارع النقطة B، وتعيين مركز التسارع المعدوم.

جـ

$$\vec{\Gamma}(B)=\vec{\Gamma}(A)+\vec{\varepsilon}\wedge\vec{AB}-\omega^2\vec{AB}$$

A تتحرك بسرعة ثابتة فهي على المتابعة = 0

أي ($\vec{V}(A)$ ثابتة)

$\Rightarrow \vec{\Gamma}(A)=0$

$$=0+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & \omega'\\ 2l & 0 & 0\end{vmatrix}-\omega^2.(2l,0,0)$$

وهو تسارع النقطة B على جملة متماسكة

د) النقطة A هي مركز التسارع المعدوم لأن A نقطة في جملة متحركة، سرعتها ثابتة في جملة ثابتة.

5. عين النقطة من القضيب ذات السرعة الأصغرية في اللحظة المذكورة:
إن أصغر سرعة تقابل أصغر بعد عن المركز الآني للدوران.
إن الـ بعد النقطة C عن مركز الدوران الآني هو أصغر الأبعاد وبالتالي النقطة C التي هي منتصف القضيب AB هي ذات البعد الأصغر عن I وبالتالي سرعتها أصغر ما يمكن.

طلب إضافي:
ما هي سرعة انتقال I على القاعدة؟
لدينا $x_1(I)$, $y_1(I)$

$$\Longrightarrow \vec{V} = x_1'(I)\,\vec{i_1} + y_1'(I)\,\vec{j_1}$$

سرعة انتقال I

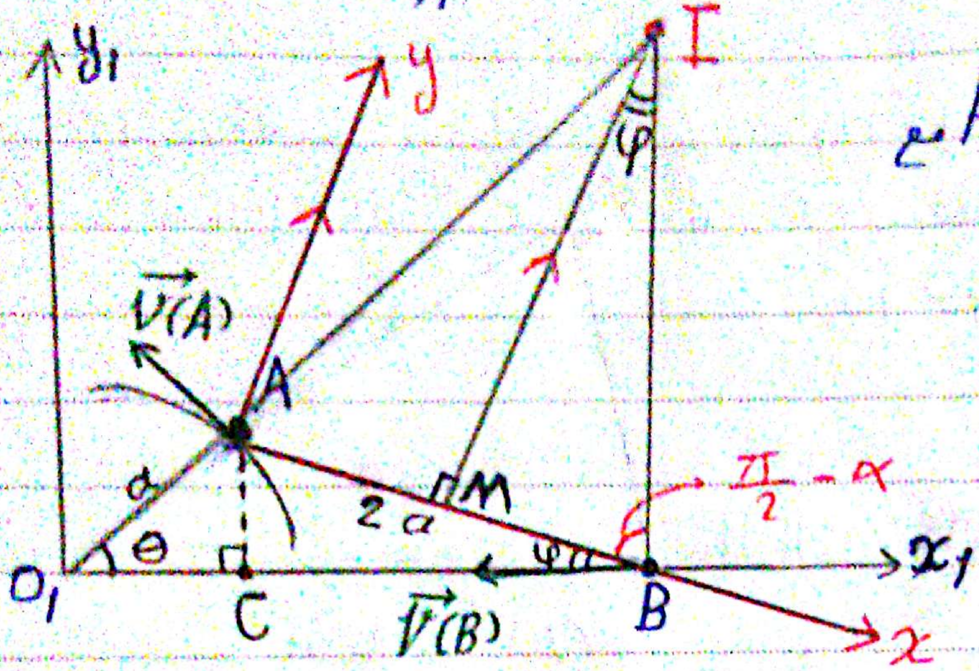
مسألة صفحة 101: (الحركة هنا حركة دورانية في مستوي أي تشكل دائرة)
ذراع O_1A طوله a يدور في مستوي ثابت بسرعة زاوية ω_1 حول نقطة ثابتة O_1، ذراع AB طوله $2a$ مرتبط مفصلياً في A بالذراع O_1A وتنزلق نهايته B على مستقيم ثابت O_1x_1 والمطلوب:
1- عين المركز الآني للدوران للقضيب AB ومعادلات الحركة (حركة القضيب AB)
2- عين القاعدة والمتدحرج.
3- عين سرعة وتسارع B
الحل:

1. لدينا حركة A دائرية فسرعتها تكون مماس الدائرة وبالتالي العامود على سرعة A هو امتداد لنصف القطر $(O_1A = a)$
نقيم عمود على سرعة B المحمولة على محور O_1x_1
نلاحظ أن $\vec{V}(A)$ لا توازي $\vec{V}(B)$
فنقطة تلاقي العمودين هي مركز آني للدوران (I)

Scanned by CamScanner

$$x_{1A} = a\cos\theta$$

$$y_{1A} = a\sin\theta$$



لدينا A قطب للحركة

باختيار الجملة المتماسكة Axy مع

القضيب AB

ومنه معادلات الحركة هي :

$$x_1(A) \;,\; y_1(A)$$

$$\varphi\,(\widehat{AB\,,\,O_1x_1})$$

لإيجاد φ ننزل من A عمود على O_1x_1 في النقطة C فنحصل على مثلثين قائمين:

ومنه: من $O_1\hat{C}A$: $AC = a\cdot\sin\theta$

من $A\hat{C}B$: $AC = 2a\sin\varphi$

$$\Longrightarrow 2a\sin\varphi = a\sin\theta$$

$$\Longrightarrow \sin\varphi = \frac{\sin\theta}{2}$$

$$\Longrightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{\sin\theta}{2}\right)$$

لكن $\theta' = w_1 \Longleftarrow \theta = w_1 t + \theta_0$

بفرض $t = 0$ ، $\theta = 0 \Longleftarrow \theta_0 = 0$

$$\Longrightarrow \theta = w_1 t$$

$$\Longrightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{\sin w_1 t}{2}\right) \quad --- (1)$$

$$x_1(A) = a\cos w_1 t \quad --- (2)$$

$$y_1(A) = a\sin w_1 t \quad --- (3)$$

معادلات الحركة

$$\overrightarrow{O_1 I} = x_1(I)\vec{i_1} + y_1(I)\vec{j_1}$$

$$x_1(I)\vec{i_1} = \overrightarrow{O_1 B} = \overrightarrow{O_1 C} + \overrightarrow{CB} = (a\cos\theta + 2a\cos\varphi)\vec{i_1}$$

هنا يجب توحيد الوسطاء θ و φ

$$\star \quad x_1(I) = a\sqrt{1-\sin^2 w_1 t} + 2a\sqrt{1-\frac{\sin^2 w_1 t}{4}}$$

نعلم أن:

$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$

وحسب العلاقة بين φ و θ

$\cos^2\varphi = 1-\sin^2\varphi$

$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi}$

$= \sqrt{1-\frac{\sin^2\theta}{4}}$

$\cos\varphi = \sqrt{1-\frac{\sin^2 w_1 t}{4}}$

ولدينا:

$$y_1(I)\vec{j_1} = \overrightarrow{BI}\cdot\vec{j_1} = O_1B \cdot tg\theta \cdot \vec{j_1}$$

$$= x_1(I)\cdot tg\, w_1 t \cdot \vec{j_1}$$

$$\Rightarrow y_1(I) = x_1(I)\cdot tg\, w_1 t \quad \star\star$$

إن $\star$ و $\star\star$ هي معادلات وسيطية للقاعدة

تعيين المعادلات الوسيطية للمتدرج:

$$x(I) = AM = AB - MB$$

$$= 2a - MB = 2a - IB\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$= 2a - IB\cdot\underbrace{\sin\varphi}$$

$$= \frac{\sin\theta}{2} = \frac{\sin w_1 t}{2}$$

$$x(I) = 2a - IB\cdot\frac{\sin w_1 t}{2} \quad \star\star\star$$

$$y(I) = IM = IB\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = IB\cdot\cos\varphi$$

$$= IB\cdot\sqrt{1-\sin^2\varphi} = IB\cdot\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta}{4}}$$

$$y(I) = IB\cdot\sqrt{1-\frac{\sin^2 w_1 t}{4}} \quad \star\star\star\star$$

المعادلات الوسيطية للمتدرج

انتهت المحاضرة

بيان البشاش