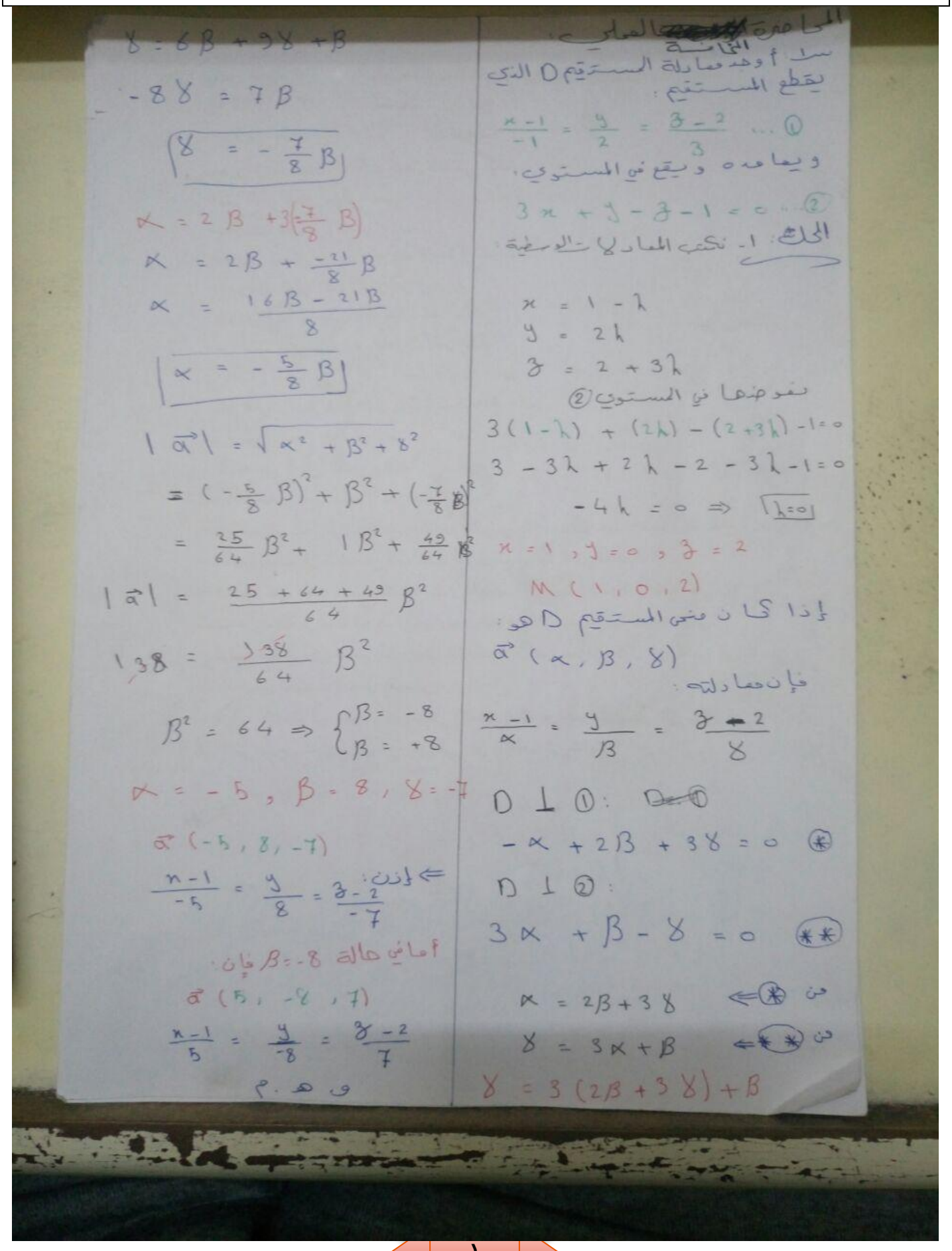
هندسة تحليلية

الأستاذ : أحمد عابيل

المحاضرة : الخامسة (عملي)

إعداد : منى + رولا



المحاضرة الثامنة

س1 f أوجد معادلة المستقيم D الذي يقطع المستقيم:

$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{3}$ ... ①

ويعامد ○ ويقع في المستوي:

$3x + y - z - 1 = 0$ ... ②

الحل: 1- نكتب المعادلات الوسيطية:

$x = 1 - \lambda$

$y = 2\lambda$

$z = 2 + 3\lambda$

نعوضها في المستوي ②

$3(1-\lambda) + (2\lambda) - (2+3\lambda) - 1 = 0$

$3 - 3\lambda + 2\lambda - 2 - 3\lambda - 1 = 0$

$-4\lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 0}$

$x = 1 , y = 0 , z = 2$

$M(1, 0, 2)$

إذا كان منحى المستقيم D هو:

$\vec{a}(\alpha, \beta, \gamma)$

فإن معادلته:

$\frac{x-1}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z-2}{\gamma}$

$D \perp ①$: D ⊥ ①

$-\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0$ (*)

$D \perp ②$:

$3\alpha + \beta - \gamma = 0$ (**)

من (*) $\Leftarrow \alpha = 2\beta + 3\gamma$

من (**) $\Leftarrow \gamma = 3\alpha + \beta$

$\gamma = 3(2\beta + 3\gamma) + \beta$

$\gamma = 6\beta + 9\gamma + \beta$

$-8\gamma = 7\beta$

$\boxed{\gamma = -\frac{7}{8}\beta}$

$\alpha = 2\beta + 3(-\frac{7}{8}\beta)$

$\alpha = 2\beta + \frac{-21}{8}\beta$

$\alpha = \frac{16\beta - 21\beta}{8}$

$\boxed{\alpha = -\frac{5}{8}\beta}$

$|\vec{a}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$

$= (-\frac{5}{8}\beta)^2 + \beta^2 + (-\frac{7}{8}\beta)^2$

$= \frac{25}{64}\beta^2 + 1\beta^2 + \frac{49}{64}\beta^2$

$|\vec{a}| = \frac{25 + 64 + 49}{64}\beta^2$

$1,38 = \frac{138}{64}\beta^2$

$\beta^2 = 64 \Rightarrow \begin{cases} \beta = -8 \\ \beta = +8 \end{cases}$

$\alpha = -5 , \beta = 8 , \gamma = -7$

$\vec{a}(-5, 8, -7)$

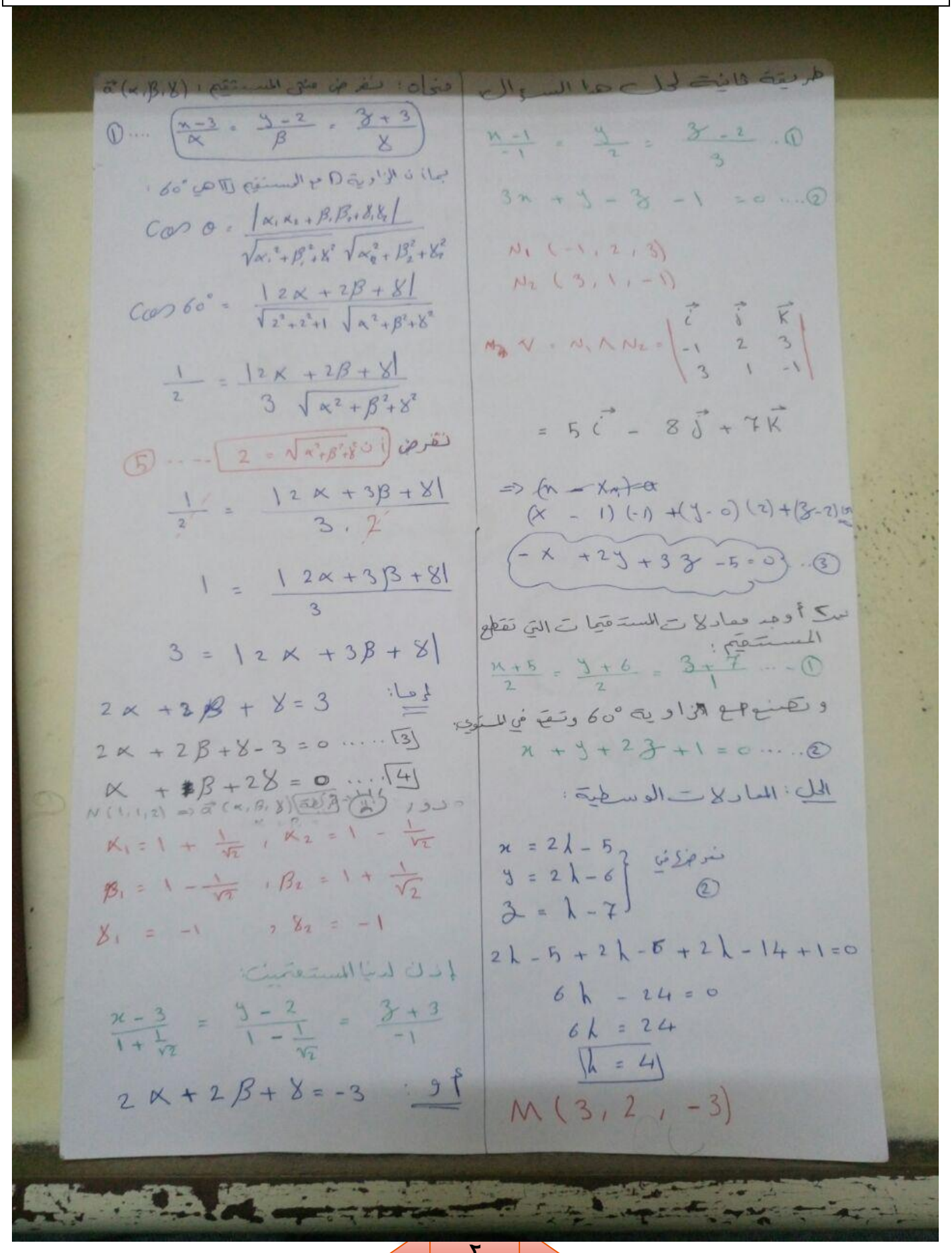
$\Leftarrow$ إذن: $\frac{x-1}{-5} = \frac{y}{8} = \frac{z-2}{-7}$

أما في حالة $\beta = -8$ فإن:

$\vec{a}(5, -8, 7)$

$\frac{x-1}{5} = \frac{y}{-8} = \frac{z-2}{7}$

و هـ م



طريقة ثانية لحل هذا السؤال

$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{3}$ ... ①

$3x + y - z - 1 = 0$ ... ②

$N_1(-1, 2, 3)$

$N_2(3, 1, -1)$

$\vec{V} = N_1 \wedge N_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= 5\vec{i} - 8\vec{j} + 7\vec{k}$

$\Rightarrow (x - x_A)a$

$(x - 1)(-1) + (y - 0)(2) + (z - 2)$

$-x + 2y + 3z - 5 = 0$ ... ③

س2 أوجد معادلات المستقيمات التي تقطع المستقيم:

$\frac{x+5}{2} = \frac{y+6}{2} = \frac{z+7}{1}$ ... ①

وتصنع مع المستوي زاوية $60°$ وتقع في المستوي:

$x + y + 2z + 1 = 0$ ... ②

الحل: المعادلات الوسطية:

$x = 2\lambda - 5$
$y = 2\lambda - 6$
$z = \lambda - 7$

نعوض في ②

$2\lambda - 5 + 2\lambda - 6 + 2\lambda - 14 + 1 = 0$

$6\lambda - 24 = 0$

$6\lambda = 24$

$\lambda = 4$

$M(3, 2, -3)$

وتحاد: نفرض متجه المستقيم: $\vec{a}(\alpha, \beta, \gamma)$

① ... $\frac{x-3}{\alpha} = \frac{y-2}{\beta} = \frac{z+3}{\gamma}$

بما أن الزاوية D مع المستقيم Π هي $60°$:

$\cos\theta = \frac{|\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2|}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2}\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2}}$

$\cos 60° = \frac{|2\alpha + 2\beta + \gamma|}{\sqrt{2^2+2^2+1}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$

$\frac{1}{2} = \frac{|2\alpha + 2\beta + \gamma|}{3\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$

نفرض ⑤ ... $2 = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ أي

$\frac{1}{2} = \frac{|2\alpha + 3\beta + \gamma|}{3 \cdot 2}$

$1 = \frac{|2\alpha + 3\beta + \gamma|}{3}$

$3 = |2\alpha + 3\beta + \gamma|$

إما: $2\alpha + 3\beta + \gamma = 3$

$2\alpha + 2\beta + \gamma - 3 = 0$ ... ③

$\alpha + \beta + 2\gamma = 0$ ... ④

$N(1, 1, 2) \Rightarrow \vec{a}(\alpha, \beta, \gamma)$ تقع في ④ ... و

$\alpha_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\alpha_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\beta_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\beta_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

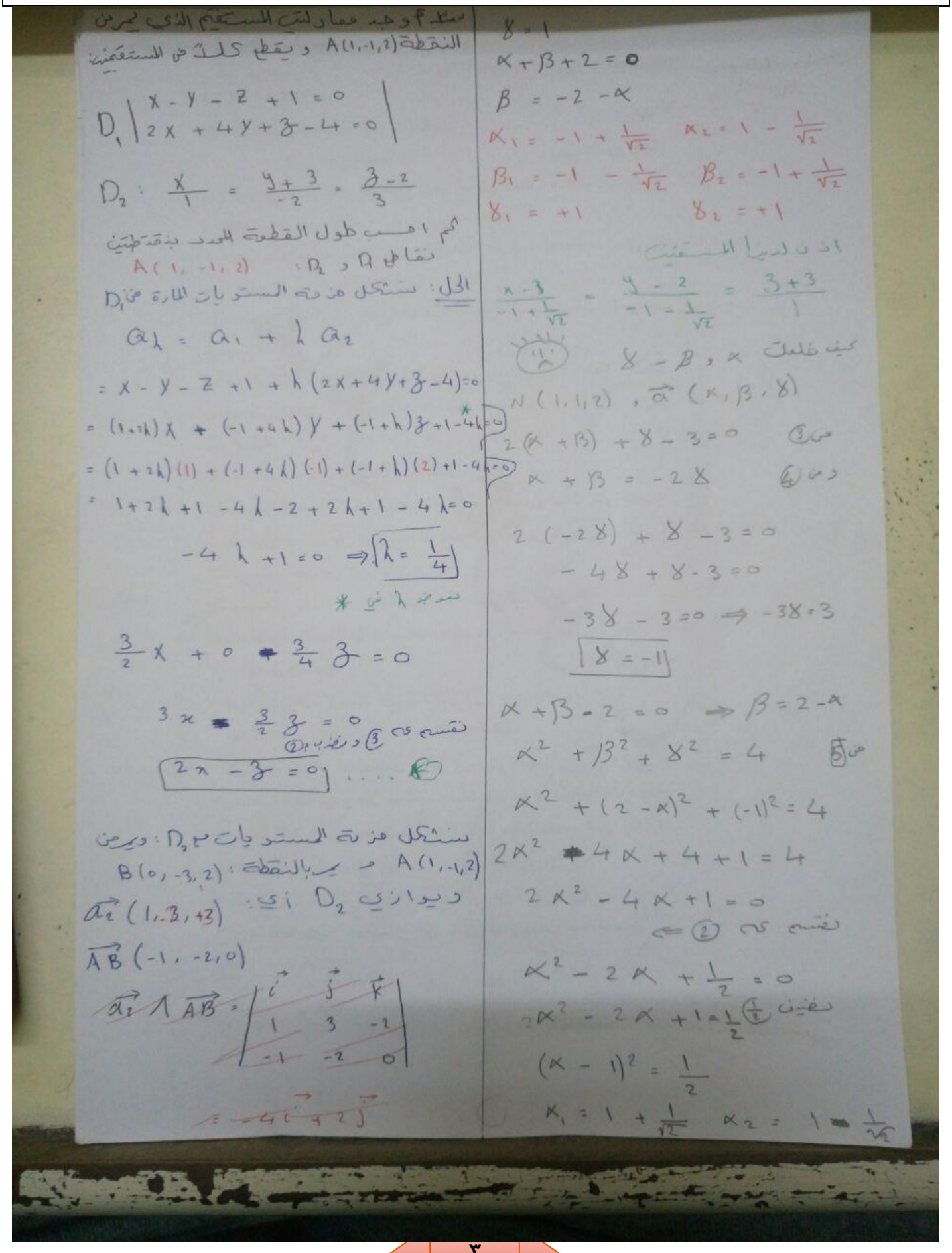
$\gamma_1 = -1$ ، $\gamma_2 = -1$

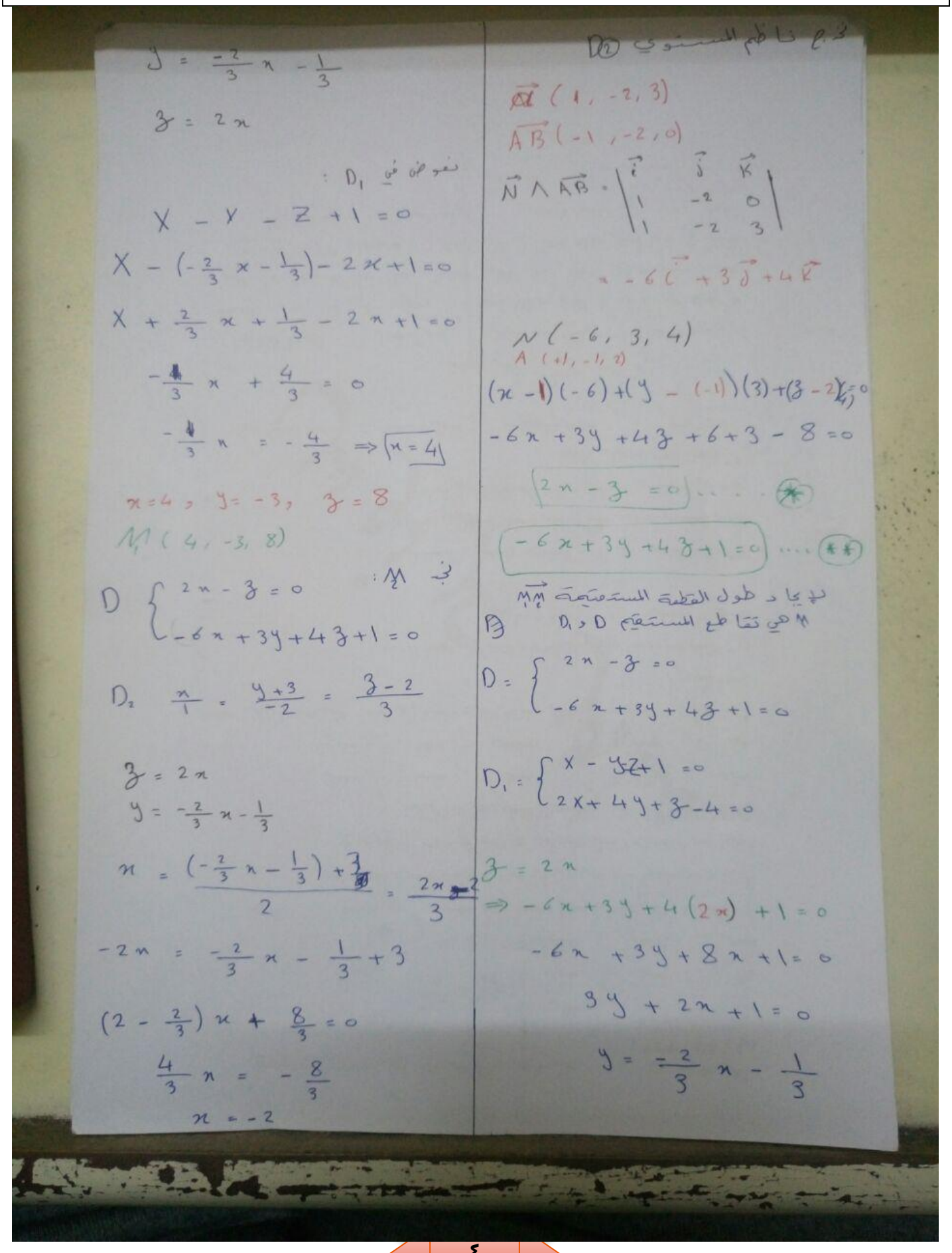
إذن لدينا المستقيمين:

$\frac{x-3}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y-2}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{z+3}{-1}$

أو: $2\alpha + 2\beta + \gamma = -3$

Syria Math


D1 | x - y - z + 1 = 0 ; 2x + 4y + z - 4 = 0 |
D2 : x/1 = (y+3)/(-2) = (z-2)/3
A(1, -1, 2)
الحل:
a2 = a1 + λ a2
= x - y - z + 1 + λ(2x + 4y + z - 4) = 0
= (1+2λ)x + (-1+4λ)y + (-1+λ)z + 1 - 4λ = 0
= (1+2λ)(1) + (-1+4λ)(-1) + (-1+λ)(2) + 1 - 4λ = 0
1 + 2λ + 1 - 4λ - 2 + 2λ + 1 - 4λ = 0
-4λ + 1 = 0 ⇒ λ = 1/4
3/2 x + 0 + 3/4 z = 0
3x + 3/2 z = 0
2x - z = 0
B(0, -3, 2)
A(1, -1, 2)
a2 (1, 3, 1)
AB (-1, -2, 0)
a2 ∧ AB
= -4i + 2j
γ = 1
α + β + 2 = 0
β = -2 - α
α1 = -1 + 1/√2 ، α2 = -1 - 1/√2
β1 = -1 - 1/√2 ، β2 = -1 + 1/√2
γ1 = +1 ، γ2 = +1
(x-3)/(-1+1/√2) = (y-2)/(-1-1/√2) = (3+3)/1
N(1, 1, 2) ، a (α, β, γ)
2(α + β) + γ - 3 = 0
α + β = -2γ
2(-2γ) + γ - 3 = 0
-4γ + γ - 3 = 0
-3γ - 3 = 0 ⇒ -3γ = 3
γ = -1
α + β - 2 = 0 ⇒ β = 2 - α
α² + β² + γ² = 4
α² + (2 - α)² + (-1)² = 4
2α² - 4α + 4 + 1 = 4
2α² - 4α + 1 = 0
α² - 2α + 1/2 = 0
α² - 2α + 1 = 1/2
(α - 1)² = 1/2
α1 = 1 + 1/√2 ، α2 = 1 - 1/√2



$y = \frac{-2}{3}x - \frac{1}{3}$

$z = 2x$

نعوض في D_1 :

$x - y - z + 1 = 0$

$x - (-\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}) - 2x + 1 = 0$

$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} - 2x + 1 = 0$

$-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} = 0$

$-\frac{1}{3}x = -\frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{x = 4}$

$x = 4,\ y = -3,\ z = 8$

$M_1(4, -3, 8)$

نعوض في M_2 :

$D \begin{cases} 2x - z = 0 \\ -6x + 3y + 4z + 1 = 0 \end{cases}$

$D_2 \quad \frac{x}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{3}$

$z = 2x$

$y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

$x = \frac{(-\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}) + z}{2} = \frac{2x - 2}{3}$

$-2x = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} + 3$

$(2 - \frac{2}{3})x + \frac{8}{3} = 0$

$\frac{4}{3}x = -\frac{8}{3}$

$x = -2$

ج/ نأخذ المستوي D_2

$\vec{N}(1, -2, 3)$

$\vec{AB}(-1, -2, 0)$

$\vec{N} \wedge \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

$= -6\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$

$N(-6, 3, 4)$

$A(+1, -1, 2)$

$(x-1)(-6) + (y - (-1))(3) + (z-2)(4) = 0$

$-6x + 3y + 4z + 6 + 3 - 8 = 0$

$\boxed{2x - z = 0} \quad \ldots (*)$

$\boxed{-6x + 3y + 4z + 1 = 0} \quad \ldots (**)$

ب/ $\overrightarrow{M_1M_2}$ طول القطعة المستقيمة

M_2 هي نقاط تقاطع المستقيم D_1 و D

$D = \begin{cases} 2x - z = 0 \\ -6x + 3y + 4z + 1 = 0 \end{cases}$

$D_1 = \begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ 2x + 4y + z - 4 = 0 \end{cases}$

$z = 2x$

$\Rightarrow -6x + 3y + 4(2x) + 1 = 0$

$-6x + 3y + 8x + 1 = 0$

$3y + 2x + 1 = 0$

$y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$