بسم الله الرحمن الرحيم

مادة التحليل العقدي ((١))

مدرّس المقرّر : د. محمّد الشيخ / تاريخ المحاضرة : 3/10/2016

قبل البدء بالمقرر نبّه الدكتور إلى أنَّ بعض الطلّاب قد تفتقد كتاباتهم الامتحانيّة إلى المنطق فمثلاً غالباً ما يتمٌّ الخلط بين هذين التعريفين ((للدالة المحدودة)):

$$1)\quad \exists\, M > 0\ ;\ |f(x)| < M\ ,\ \forall x \in A$$

أو:

$$2)\qquad \forall x \in A\ :\ \exists\, M\ ;\ |f(x)| < M$$

التعريف الأوّل صحيح لأنّه يعني أنّه يوجد M وحيدة بينما التعريف الثاني يعني أنّهُ توجد M لكل x وبالتالي M متعلّقة بـ x وهي غير وحيدة وبهذا فإنَّ التعريف الثاني خاطئ .

<u>وأيضاً:</u>

أعطى الدكتور **<u>لمحة سريعة</u>** عن مجموعات الأعداد وتطوّرها:

<u>الأعداد الطبيعيّة $\mathbb{N}$:</u>

هي أوّل ما عرفه الإنسان من مجموعات الأعداد وتعامل معه بداية الأمر وهي الأعداد الّتي تبدأ من الواحد ثم بإضافة واحد كل مرة نحصل على عدد طبيعي جديد وهكذا.. ، ويمكن تمثيلها على مستقيم الأعداد الحقيقية .

<u>الأعداد الكليّة :</u>

هي تشمل جميع الأعداد الطبيعية بالإضافة إلى الصفر (حيث يعتبره معظم الرياضيين بأنّه عدد غير طبيعي) .

<u>الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$:</u>

تضمُّ الأعداد الكليّة بالإضافة للأعداد السالبة .

<u>ملاحظة :</u>

إنّ عمليّتا الجمع والضرب المألوفتين ممكنتان دوماً في مجموعة الأعداد الطبيعيّة $\mathbb{N}$ بينما باقي العمليّات غير ممكنة بالضرورة في $\mathbb{N}$.

في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ بالإضافة إلى عمليتي الجمع والضرب فإنَّ عمليّة الطرح ممكنة دوماً لكن عمليّة القسمة تبقى غير ممكنة دوماً في هذه المجموعة ، ولذلك توسّعنا إلى مجموعة الأعداد العاديّة .

الأعداد العادية $\mathbb{Q}$:

هي كل عنصر ينتمي للمجموعة التالية:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : \ m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$$

ونلاحظ أنّه باعتبار $n = 1$ فإنَّ $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ ، وبالتالي أصبح لدينا :

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

ملاحظة:

يتميّز العدد العادي بأنه يمكن أن يكتب على شكل عدد عشري منتهي مثل : $\frac{1}{4} = 0.25$ ،

أو عدد عشري غير منتهي لكنّه دوري مثل : $\frac{1}{3} = 0.3333333 \ldots$

ملاحظة ٢:

ونلاحظ أنَّ عملية القسمة ممكنة دوماً في $\mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد العاديّة ، ولكنّ عمليّة الجذر لعدد موجب ليست ممكنة دوماً في $\mathbb{Q}$ ، فمثلاً إنَّ المعادلة $x^2 = 2$ مستحيلة الحل في $\mathbb{Q}$ (لايوجد عدد عادي مربّعه 2) ، وهذا ما أحوجنا لمجموعة الأعداد الحقيقية .

الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$:

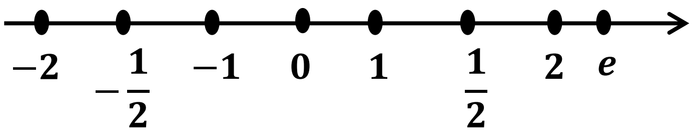
هي مجموعة الأعداد العاديّة بالإضافة للأعداد الغير العاديّة .

حيث الأعداد غير العاديّة هي الأعداد الّتي تكتب على شكل عدد عشري غير منتهي وغير دوري ، مثل :

$$3.14577286289 \ldots$$

والعدد النيبري e يعتبر عدد غير عادي و الأعداد $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ هي أعداد غير عاديّة .

- نلاحظ أنّ جميع المجموعات السابقة الّتي ذكرناها يمكن تمثيلها هندسيّا على مستقيم واحد يدعى مستقيم الأعداد الحقيقيّة (عادةً نختاره المستقيم الأفقي) .



ولكن:

بقيت لدينا مشكلة إيجاد الجذر للعدد السالب حيث أنَّ المعادلة : $x^2 = -2$ مثلاً لا يمكن إيجاد جذر حقيقي لها ، لذلك اقترح العلماء أنَّ $i^2 = -1$ أي إنَّ -1 له جذر ما وهو i ، عندئذٍ:

$$x^2 = -2 \ \Rightarrow x = \mp\sqrt{2}\, i$$

ومن هنا نشأت الأعداد العقديّة وهي الّتي سوف تكون موضوع دراستنا في الفصل الأوّل من هذا المقرّر ..

الفصل الأوّل : مجموعة الأعداد العقديّة (المركّبة)

تعريف العدد العقدي:

نسمّي عدداً عقديّاً هو كل ثنائيّة **مرتّبة** من الأعداد الحقيقية ، أي أنَّ:

$$\mathbb{C} = \{z = (\alpha , \beta) \ \ ; \ \ \alpha , \beta \in \mathbb{R}\}$$

مثلاً :

$$(0,1), (1,0), (0,0), (-2,3), (3,-2), (\pi, \sqrt{2}) \ \ \in \mathbb{C}$$

ملاحظة:

كلمة "مرتبة" مهمة في التعريف لأنّها تعني أنَّ ترتيب عناصر الثنائيّة مهم ،

فمثلاً : العدد العقدي $(3,-2)$ يختلف عن العدد العقدي $(-2,3)$ أي عند التبديل بين مسقطين نحصل على عدد جديد .

تعريف التساوي في $\mathbb{C}$:

$$\forall z_1 = (\alpha_1, \beta_1), z_2 = (\alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{C} \ ; \ z_1 = z_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \ \ , \ \ \beta_1 = \beta_2$$

البنى الجبريّة لـ مجموعة الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$:

- **$(\mathbb{C}, +)$ زمرة تبديلية:**

لنعرّف عمليّة الجمع (قانون تشكيل داخلي) على $\mathbb{C}$ كما يلي :

$$\forall (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{C} \ : \ (\alpha_1, \beta_1) + (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2 \ \ , \ \ \beta_1 + \beta_2)$$

تمرين:

أثبت أنَّ $(\mathbb{C}, +)$ هي زمرة تبديليّة .

إرشاد للبرهان:

من تعريف عمليّة الجمع نجد أنّها داخليّة لأننا نلاحظ أنَّ:

" ثنائية ((مرتبة من $\mathbb{R}$)) " $+$ " ثنائية ((مرتبة من $\mathbb{R}$)) " $=$ " ثنائية ((مرتبة من $\mathbb{R}$)) "

وأنَّ الحيادي هو: $(0,0)$ والنظير هو: $(-\alpha, -\beta)$.

- **$(\mathbb{C}^*, .)$ زمرة تبديلية:**

نعرّف الضرب في $\mathbb{C}$ كما يلي :

$$\forall (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{C} \ : \ (\alpha_1, \beta_1).(\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1 . \alpha_2 - \beta_1 . \beta_2 \ \ , \ \ \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)$$

تمرين:

أثبت أنَّ : $(\mathbb{C}^*,.)$ هي زمرة تبديليّة ، حيث $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}/(0,0)$

إرشاد للبرهان:

حيادي الضرب هو $(1,0)$ ، وإيجاد المقلوب على الطالب: $(\alpha,\beta)^{-1} = ?$ ((نضرب بالحيادي))

تمرين:

أثبت أنَّ $(\mathbb{C},+,.)$ حقل تبديلي .

ملاحظة:

الحقل $\mathbb{C}$ لا يحوي قواسم صفريّة ، أي أنَّ :

$$if : z_1.z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0 \ or \ z_2 = 0$$

تذكرة :

القواسم الصفريّة تمَّ التعرّف عليها في البنى الجبريّة (٢) و تعني أنّه إذا كان هناك جداء ((من عنصرين)) مساوٍ للصفر لكن أيّاً من العنصرين لا يساوي الصفر أي:

$$a.b = 0 \ ; \ a,b \neq 0$$

عندئذٍ نقول عن a,b إنّها قواسم صفريّة .

سؤال:

هل $\mathbb{C}$ مجموعة مرتّبة كليّاً؟

الجواب:

لنعرّف العلاقة:

$$(\alpha_1,\beta_1) \leq (\alpha_2,\beta_2) \ \Leftrightarrow \ \alpha_1 < \alpha_2 \ \vee (\alpha_1 = \alpha_2 \wedge \beta_1 \leq \beta_2)$$

إنَّ هذه العلاقة هي علاقة ترتيب كلّي على المجموعة $\mathbb{C}$ ، أثبت ذلك .

تمرين:

أثبت أنَّ الحقل $\mathbb{C}$ ليس حقلاً مرتّباً كليّاً .

إرشاد للحل:

أي حقل مرتّب كليّاً فيه أي عدد يكون مربّعه موجب ، إذا لإثبات أنَّ $\mathbb{C}$ ليس حقلاً مرتّباً كليّاً ، نثبت العكس ..

البرهان ((إضافي)):

أوّلاً: نريد إثبات أنّه في الحقل المرتّب كليّاً وليكن F مربّع كل عنصر أكبر أو يساوي الصفر :

$$\forall\, a \in F \;:\;\; a^2 = a.a \geq 0$$

لدينا:

$$\forall\, a \in F : 0 \leq a \;\vee a \leq 0$$
$$if \quad 0 \leq a : 0 = 0.a \leq a.a = a^2$$

وهذا لأنَّه هناك علاقة ترتيب وانسجام مع الضرب:

$$if \;\; a \leq 0 \;:\;\; a + (-a) \leq 0 + (-a) \;\Rightarrow 0 \leq -a$$

وهذا لكون $-a \in F$ و F حقل وهناك انسجام مع الجمع

$$\Rightarrow 0 = 0(-a) \leq (-a)(-a) = a^2$$

وهذا يبيّن أنَّ مربّع كل عنصر في الحقل المرتّب كليّاً أكبر أو يساوي الصفر.

<u>ثانياً:</u> بما أنَّ F حقل فإنَّ : $0_F \neq 1_F$ ولدينا أيضاً : $1.1 = 1^2 = 1 \geq 0$

$$\Rightarrow 0 < 1 \;\Rightarrow\; -1 < 0$$

نفرض جدلاً أنَّ $\mathbb{C}$ حقل مرتّب كليّاً وفق علاقة ترتيب كلّي $(\leq)$ عندئذٍ:

$$(0,0) \leq (0,1)^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -(1,0) \Rightarrow (1,0) \leq (0,0)$$

ولكن وجدنا أنَّ $(1,0) \geq (0,0)$ وحسب الخاصة التخالفية فإنَّ:

$$(1,0) = (0,0) \;\Rightarrow\;\; 0 = 1$$

وهذا يناقض كون F حقل ، ومنه الفرض الجدلي خاطئ ، وبذلك يتمُّ المطلوب.

<u>ملاحظة:</u>

<u>الانسجام :</u> يعني أنّه إذا أضفنا عدد لطرفي متراجحة فلن تتغير المتراجحة ، أو إذا ضربنا بعدد فإنَّ ذلك أيضاً لن يغيّر من قيمة المتراجحة وهذا يبيّن أنَّ : " $\mathbb{R}$ هو حقل مرتّب كليّاً " ، بينما " $\mathbb{C}$ ليس حقلاً مرتّباً كليّاً ".

<u>تنبيه:</u>

لا يحقُّ لنا مقارنة الأعداد العقديّة في الحقل $\mathbb{C}$ بعلاقة الترتيب $(\leq)$ لأنَّ $\mathbb{C}$ ليس حقل مرتب كليّاً بالأساس.

- **<u>$(\mathbb{C},+,\times)$ فضاء متجهي:</u>**

لنعرّف عمليّة ضرب عدد عقدي بسلمي (حقيقي):

$$\forall z = (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}\,, \lambda \in \mathbb{R} :\; \lambda.z = (\lambda\alpha, \lambda\beta) \in \mathbb{C}$$

<u>تمرين:</u>

أثبت أنَّ $(\mathbb{C},+,\times)$ فضاء متجهي.

<u>نتيجة:</u>

مما سبق نستنتج أنَّ مجموعة الأعداد العقديّة هي فضاء وحقل أيضاً.

الشكل الجبري (الديكارتي) للعدد العقدي:

تمهيد:

إنَّ التطبيق الّذي يقرن كل عدد حقيقي α بالعدد العقدي $(\alpha, 0)$ هو تماثل حقلي :

$$\mathbb{R} \longrightarrow \{(\alpha, 0)\ ;\ \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$$
$$\alpha \longmapsto (\alpha, 0)$$

يمكن اعتبار أنَّ $\mathbb{R}$ جزء من $\mathbb{C}$ ، وذلك باعتبار أنَّ العدد الحقيقي α هو ذاته العدد العقدي $(\alpha, 0)$

أي إنَّ: $\alpha = (\alpha, 0)$

وذلك بسبب وجود هذا التماثل الحقلي:

((تطبيق متباين وغامر (تقابل) ، وهو تشاكل أي يحافظ على العمليّات في الحقل))

انتهت المحاضرة ..

مع تحيات فريق الرياضيات الأوّل ^_^

لا تنسونا من صالح دعواتكم