Syria Math

تحليل ١

الاستاذة : علا أسبر

المحاضرة : الثالثة عملي

إعداد : رهف + رسمية + شهيناز

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2\cdot 10^n}{5+3\cdot 10^n} = \frac{2}{3}$$

$$\left|\frac{1+2\cdot 10^n}{5+3\cdot 10^n}-\frac{2}{3}\right| = \left|\frac{3+6\cdot 10^n-10-6\cdot 10^n}{15+9\cdot 10^n}\right|$$

$$=\left|\frac{-7}{15+9\cdot 10^n}\right| = \frac{7}{15+9\cdot 10^n} < \frac{9}{9\cdot 10^n} = \frac{1}{10^n} < \varepsilon$$

$$10^n > \frac{1}{\varepsilon} \quad : \quad n > \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$N_\varepsilon \geq \left[\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$$

$$10^n = (1+9)^n \geq 1+9n$$

$$\frac{1}{10^n} \leq \frac{1}{1+9n} < \frac{1}{9n} < \varepsilon$$

$$9n > \frac{1}{\varepsilon} \qquad n > \frac{1}{9\varepsilon}$$

$$N_\varepsilon \geq \left[\frac{1}{9\varepsilon}\right]$$

Alamal

نهاية متتالية: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon$

برهن تقارب المتتالية:

$a_1 = \sqrt{2}\ ,\ a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\ ,\ a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

متزايدة $a_n \le a_{n+1} \quad \forall n \in N^*$

$a_n < a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$

$a_n^2 < 2 + a_n \Rightarrow a_n^2 - a_n - 2 < 0$

$(a_n - 2)(a_n + 1) < 0$

a_n		-1		2	
	$+$	0	$-$	0	$+$

$-1 < a_n < 2 \quad \forall n \in N^*$

محدودة من الأعلى

متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة ولنفرض أنها

$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \ell$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2+a_n} \Rightarrow \ell = \sqrt{2+\ell}$

نربع الطرفين.

$\ell^2 - \ell - 2 = 0$

$(\ell - 2)(\ell + 1) = 0$

Alamal

C3

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

$\Leftarrow l=2$ مرفوض $l=-1$
لأن المتتالية متقاربة بحدودها فرضاً على.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n\cdot 5^n - 3\cdot 5^n}{3^n\cdot 5 - 3^n\cdot 5^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{3^n 5^n}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)}{\cancel{3^n 5^n}\left(\frac{1}{5^{n-1}}-1\right)}$$

$$= \frac{1}{-1} = -1 \qquad \frac{3}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+\sin\frac{n\pi}{3}}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{1}+\frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{3^n}\right)$$

$$\frac{-1}{3^n} \leq \left(\frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{3^n}\right) \leq \frac{1}{3^n}$$

$$\downarrow 0$$

$$= 3 + 0 = 3$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$$

مبرهنة: إذا كانت $\lim\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|$ موجودة فإن $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}$ موجودة وتساوي

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|$$

$b_n = n \qquad b_{n+1} = n+1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$$

Alamal

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim \sqrt[n]{n!} \qquad b_n = n! \qquad b_{n+1} = (n+1)!$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \Rightarrow b_n = \frac{n^n}{n!}$$

$$b_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = e$$

Alamal

(5

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+\cdots+a^n}{1+b+\cdots b^n}$$ ن $|a|<1$, $|b|<1$

$$S = 1 + \cdots a^n$$
$$aS = a + \cdots + a^{n+1}$$
$$S - aS = 1 - a^{n+1} \Rightarrow S = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

$$\lim_{n\to\infty} S = \frac{1}{1-a} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1-a}}{\frac{1}{1-b}} = \frac{1-b}{1-a}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

$\frac{n}{2}[a_1+a_n]$ قانون

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3+9+15+\cdots 3(2n-1)}{2(n^2-1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{\frac{n}{2}[3+3(2n-1)]}{2(n^2-1)} = \frac{6n^2}{4n^2-4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n-3}\right)^n = 1^\infty$$ عدم تعيين

نفرض: $y = \left(\frac{n-2}{n-3}\right)^n \Rightarrow \ln y = n \ln\left(\frac{n-2}{n-3}\right)$

Alahat

$$\lim_{n\to\infty} \ln y = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n-2}{n-3}\right)}{\frac{1}{n}}$$

سنطبق قانون أ مشتق البسط لحال ومشتق المقام لحال (لوبيتال)

$$\lim_{n\to\infty} \cdot \frac{(n-3-n+2)\,\cancel{(n-3)}\,(-n^2)}{(n-3)^2\,(n-2)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n-3)(n-2)} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y = \lim_{n\to\infty} e^{\ln y}$$

$$= e^1 = e$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$0$$

هذا متغير محدود بلا متناهي في الصغر هو لا متناهي في الصغر

$$\frac{\sin n}{n} = \frac{1}{\boxed{n}} \cdot \underbrace{\sin n}_{\text{محدود}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n}\right] = 1+0=1$$

Alamat