# جبر خطي ١

الدكتورة: شغف زوربا

المحاضرة : الثانية عشرة

إعداد : منى

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

Subject: الكثر ٨٨ — ٢٠١٦/١١/٢

* مجموعة من الخواص المتعلقة بالمصفوفات:

1) إذا كانت $A, B \in M_{m\times n}(F)$ فإن:
$(A+B)^t = A^t + B^t$

2) $(A.B)^t = A^t . B^t$
وذلك إذا كانت $A \in M_{m\times n}(F)$ و $B \in M_{m\times n}(F)$

3) إذا كانت المصفوفة $A$ قابلة للقلب فإن:
$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

4) $rank(A) = rank(A^t)$

5) $det(A) = det(A^t)$

6) $rank(A) = rank(A^{-1})$

7) $det(A.B) = det(A).det(B)$

8) $det(A+B)$ لا تساوي بالضرورة: $det(A) + det(B)$

9) $det(\lambda A) = \lambda^n . det(A)$

$A \sim B \Rightarrow$ $R_i \to \lambda R_i$ $det(B) = \lambda . det(A)$

## الفصل الثالث:

### حل جملة المعادلات الخطية

تعريف: ندعو كل معادلة من الشكل:
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n = b$$
حيث: $a_1, a_2, \ldots a_n, b \in F$ مجموعة من الثوابت تنتمي إلى الحقل $F$.
معادلة خطية معرفة على الحقل $F$

الجبر خطي - ١

ونكتبها أيضاً بالشكل: $\sum_{i=n}^{n} a_i . x_i = b$

أمثلة:

1- $2x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 4x_4 + x_7 = 0$
معادلة خطية معرفة على $R$ ولها سبع متحولات.

2- $4x + 2y + 7Z = 0$
معادلة خطية معرفة على $R$ بثلاث متحولات

3- $4x^2 + 4y - Z = 2$ «غير خطية»

4- $x_n^{\frac{1}{2}} + 2x_2 + x_3^{\frac{1}{3}} + x_n = 0$ «غير خطية»

5- $\sqrt{2}\, x_n + x_2 + x_3 + 1 = 0$
«معادلة خطية» «معرفة على $R$».

6- $x_1 + 2x_2 + \sqrt{3}\, x_3 + \sqrt{x_4} = -2$
«معادلة غير خطية»

تعريف: ندعو مجموعة المعادلات الخطية:
$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$
جملة معادلات خطية تتألف من $m$ معادلة و $n$ متحول.
حيث: $a_{ij} \in F$ من أجل: $i \in [1 \ldots m]$ و $j \in [1 \ldots n]$ وكذلك:

AL.SAMRAH

Subject :

$b_1, b_2, \ldots, b_m \in F$

تعريف: نقول في المتتالية

$(S_1, S_2, \ldots, S_n) \in F^n$

في عناصر الحقل إنها حل المعادلة

الخطية: $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i = b$

إذا حققت:

$a_1 S_1 + a_2 S_2 + \ldots + a_n S_n = b.$

ونسمي مجموعة كل الحلول للمعادلة الخطية

بـ حل المعادلة الخطية —

← نقول في المتتالية $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$

في عناصر الحقل أنها حل لجملة المعادلات

الخطية إذا حققت كل معادلات الجملة

الخطية

- نسمي مجموعة كل الحلول: بمجموعة حل

لجملة المعادلات —

الشكل المصفوفي لجملة المعادلات الخطية

يمكن كتابة المجاهيل: $x_1, x_2, \ldots, x_n$

على شكل مصفوفة عمود أي:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

وكذلك الثوابت $a_{ij}$

حيث $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$i \in \{1, 2, \ldots, m\}$

على شكل مصفوفة

$A$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m_1} & a_{m_2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

طريقة حل جملة المعادلات الخطية:

(١) عن طريق مقلوب مصفوفة:

يمكن تطبيق هذه الطريقة إذا كان عدد المجاهيل

يساوي عدد المعادلات في الجملة الخطية

وإذا كانت مصفوفة الأمثال $A$ قابلة للقلب

أي إذا كانت: $\det(A) = 0$

يكون الحل عندئذ على الشكل:

نضرب طرفي I بمقلوب الأمثال من اليسار

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

مبرهنة: لتكن $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$

مصفوفة مربعة من المرتبة $n$ والمعرفة

على الحقل $F$. فإن القضايا متكافئة:

١- $A$ قابلة للقلب —

٢- جملة المعادلات الخطية: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i$

لها حل وحيد —

« تطبيق » لتكن جملة المعادلات:

$x + 2y + 3z = 5$

$2x + 5y + 3z = 3$

$x + 0y + 8z = 17$

AL.SAMRAH

Subject :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5\\3\\17\end{pmatrix}$$

- نوجد محدد مصفوفة الأمثال، حسب الطرالثالث

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{vmatrix}=$$

$$=1\begin{vmatrix}2&3\\5&3\end{vmatrix}-0+8\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}=$$

$$=(6-15)+8(5-4)=-9+8=-1\neq 0$$

⇐ جملة المعادلات السابقة تملك حل وحيد وذلك حسب المبرهنة السابقة

$$A.X=B \quad \text{—} \; ☆$$

حيث:
$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

نضرب طرفي ☆ بمقلوب مصفوفة الأمثال

$$\underbrace{A^{-1}.A}_{1}.X=A^{-1}.B$$

$$X=A^{-1}.B$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}.\operatorname{adj}(A)=\frac{1}{-1}=-1$$

$$\alpha_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}5&3\\0&8\end{vmatrix}=40$$

$$\alpha_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}2&3\\1&8\end{vmatrix}=(-1)(16-3)=-13$$

$$\alpha_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}2&5\\1&0\end{vmatrix}=-5$$

$$\alpha_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}2&3\\0&8\end{vmatrix}=(-1)(16)=-16$$

$$\alpha_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&3\\1&8\end{vmatrix}=(1)(5)=5$$

$$\alpha_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&2\\1&0\end{vmatrix}=2$$

$$\alpha_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}2&3\\5&3\end{vmatrix}=(6-15)=-9$$

$$\alpha_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&3\\2&3\end{vmatrix}=+3$$

$$\alpha_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}=1$$

$$D=\begin{pmatrix}40&-13&-5\\-16&5&2\\-9&3&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\operatorname{adj}(A)=\operatorname{adj}(A)\begin{pmatrix}40&-16&-9\\-13&5&3\\-5&2&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}40&-16&-9\\-13&5&3\\-5&2&1\end{pmatrix}$$

AL SAMRAH

٢٠١٦/١١/27

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1}.B$$

$$X = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$(40)(5) + 16(3) + 9(17) = -200 + 48 + \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(13)(5) + (-5)(3) + (-3)(17) =$$

$$(5)(5) + (-2)(5) + (-17)$$