المحاضرة السادسة عشر 6/ 12 /2016

مهم السؤال الخاص بالامتحان

خواص الإغلاق في اللغات المنتظمة

1 اللغات المنتظمة مغلقة بالنسبة للعمليات المعرفة عليها وهي $*$ (التكرار) , $\cdot$ (التعاقب) , $\cup$ (أو) وهي تقابل + في التعبير المنتظم

أي إذا كانت L_1 , L_2 لغتين منتظمتين فإن:

L_1^* , L_2^* , $L_1 \cdot L_2$, $L_2 \cdot L_1$, $L_1 \cup L_2$ لغات منتظمة.

2 اللغات المنتظمة مغلقة بالنسبة لعملية الإتمام، أي أن متمم لغة منتظمة هو لغة منتظمة أيضاً.

- لتكن L لغة معرفة على الأبجدية Σ نعرف متمم L بأنها اللغة $\bar{L}$ والتي تحوي جميع السلاسل المشكلة من الأبجدية Σ أي Σ^* وغير المحتواة في L

أي:

$$L \cup \bar{L} = \Sigma^*$$

$$\bar{L} = \Sigma^* - L$$

$$L = \Sigma^* - \bar{L}$$

$$L , \bar{L} \in \Sigma^* ;$$

3 اللغات المنتظمة مغلقة بالنسبة للتقاطع أي إذا كانت L_1 , L_2 لغات منتظمة فإن $L_1 \cap L_2$ لغة منتظمة

الاتومات المقابل لتقاطع M_1 , M_2 $\qquad L_1 \cap L_2 = \overline{(\bar{L}_1 \cup \bar{L}_2)}$

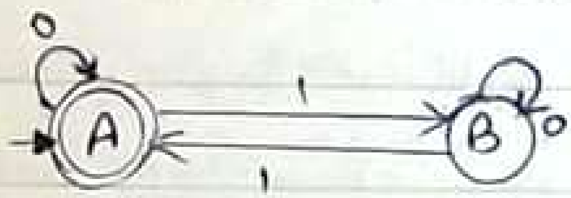
نظرية: إذا كان لدينا $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ اتومات منتهي حتمي يقبل اللغة L (علماً أنه إذا لم يكن M اتومات حتمي نحوله لاتومات حتمي وتام) فإن اللغة $\bar{L}$ تقبل من قبل الاتومات المنتهي الحتمي التالي $M' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q-F)$, أي أن الحالات النهائية في M' هي حالات غير نهائية في M والعكس بالعكس.

* لإيجاد المتمم يجب أن يكون الاتومات الموجود لدينا منتهي حتمي، ولو كان لدينا مثلاً اتومات منتهي لا حتمي فلا نستطيع إيجاد المتمم مباشرةً بل نحوله إلى اتومات منتهي حتمي كما تعلمنا سابقاً.

مثال:

ليكن لدينا الاتومات M المقابل للغة L التي تحوي عدداً فردياً من 1 حيث $\Sigma=\{0,1\}$ ، وَ الاتومات الحتمي هو المرسوم جانباً

وَ منه يمكننا إيجاد الاتومات M' المقابل للغة $\bar{L}$ كمايلي

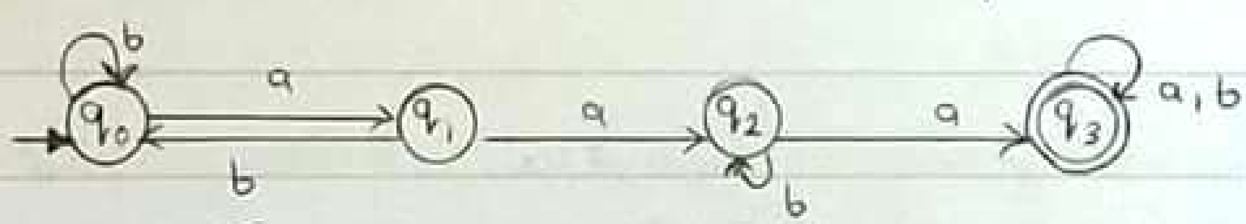


نلاحظ أن M' يقبل اللغة $\bar{L}$ وَ التي تحوي عدداً زوجياً من الواحدات

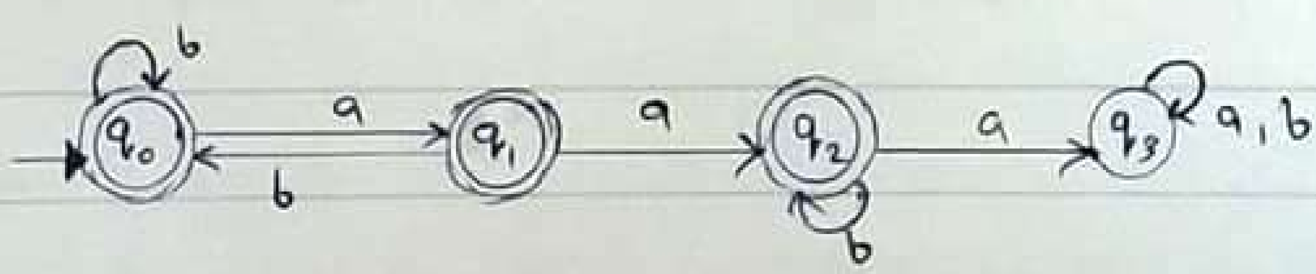
$$\bar{L} = \{0,1\}^* - L$$

مثال:

أوجد الاتومات المتمم للاتومات المنتهي التالي



نلاحظ أن هذا الاتومات منتهي حتمي، وَ بالتالي يمكن إيجاد المتمم له ويكون كالآتي:



ملاحظة: للبرهان أن اللغة منتظمة يوجد عدة طرق

① إما أن نستخدم خواص الإغلاق في اللغات المنتظمة.
② أو ننشئ أتومات منتهي مقابل للغة (حتمي أو غير حتمي).
③ أو إيجاد التعبير المنتظم المقابل لهذه اللغة، ثم إيجاد الأتومات المنتهي المقابل لهذا التعبير.

---

* توطئة الضخ:

قابلية الضخ في اللغات المنتظمة الغير منتهية،

من خواص اللغات المنتظمة الغير منتهية هي قابلية الضخ أي أنّ أي سلسلة في هذه اللغة المنتظمة يمكن ضخها من مكان واحد عدداً من المرات، أما السلسلة التي يتم ضخها من مكانين مختلفين وبنفس الدرجة فهي تحتاج إلى ذاكرة لحفظ عدد مرات الضخ وبالتالي فهي لغة غير منتظمة.

- كل أتومات منتهي (حتمي أو غير حتمي) يقبل لغة منتظمة.
- الأتومات المنتهي (حتمي أو غير حتمي) قد يولد لغة منتهية أو غير منتهية.

ملاحظة: كل لغة غير قابلة للضخ (لغة غير منتهية) فهي لغة غير منتظمة، ولكن إذا كانت اللغة غير قابلة للضخ فليس من الضروري أن تكون منتظمة، أي أنّ توطئة الضخ التي سندرسها تفيد في إثبات عدم انتظام اللغة غير المنتهية، وليس في إثبات انتظامها.

أمثلة:

إن اللغة $L_1 = \{a^* b^*\}$ هي لغة منتظمة، لأنه يوجد اتوماتا

يقبلها.

وهي لا تحتاج لذاكرة. لأن تكرار b لا يتعلق بتكرار a

أما اللغة $L_2 = \{a^n b^n \ , n \geqslant 0\}$ فهي تحتاج لذاكرة يخزن فيها عدد مرات تكرار الرمز a لنقوم بتكرار الـ b بنفس العدد فيما بعد.

وبالتالي هذه اللغة غير منتظمة.

هذا التحليل غير مقبول بشكل عام، ولإثبات أن اللغة غير منتظمة نستخدم توطئة الضخ التالية.

==توطئة الضخ== ==فهم / ضغط /==

من أجل كل لغة منتظمة $L \subseteq \Sigma^*$ يوجد ثابت $n \geqslant 1$ يدعى ثابت التوطئة بحيث يكون.

$\forall w \in L \quad : |w| \geqslant n$

عندئذ: $\exists x, y, z \quad : w = xyz \quad ; \ 1 \leqslant |y| \leqslant n$

$|xy| \leqslant n$.

أي أنه يمكن تقسيم السلسلة w إلى ثلاث سلاسل تحقق الشروط السابقة عندئذ يكون

$\forall i \geqslant 0$

فإن

$xy^i z \in L$

أي أن تكرار الجزء y عدد من المرات سوف ينتج سلسلة تنتمي للغة وهذا هو معنى الضخ.

Alamal

المحاضرة السابعة عشر   8/12/2016

أثبت أنه $L = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ لغة غير منتظمة ؟

نفرض جدلاً أنّ L لغة منتظمة ، عندئذٍ حسب توطئة الضخ يوجد ثابت $n \geq 1$ ، بحيث يكون

$\forall w \in L \; : w = 0^n 1^n \;;$

$$|w| = |0^n 1^n| = 2n \geq n$$

وبالتالي علينا إعادة كتابة السلسلة w بالشكل

$$w = xyz \quad ; \quad |xy| \leq n \; ; \quad 1 \leq |y| \leq n$$

إنّه xy ينتمي حتماً إلى القسم الأول من السلسلة w والذي هو عبارة عن 0^n أي يمكننا اعتبار $xy = 0^n$ ومنه $z = 1^n$

نأخذ $x = 0^j$ فتكون $y = 0^{n-j}$ فتصبح w من الشكل

$$w = xyz = 0^j 0^{n-j} 1^n$$

ونأخذ $i = 0$ ينتج

$$xy^i z = 0^j (0^{n-j})^0 1^n = 0^j 1^n \notin L$$

لأنّه من غير الضروري أنه يكون $j = n$ ومنه L لغة غير منتظمة .

هل اللغة $L = \{a^{2n} cc b^{3n+1} : n \geq 0\}$ منتظمة ؟

نفرض جدلاً أنه L لغة منتظمة ، عندئذٍ حسب توطئة الضخ يوجد ثابت $n \geq 1$ بحيث يكون

$\forall w \in L \; : w = a^{2n} cc b^{3n+1} \; ; \; |w| = |a^{2n} cc b^{3n+1}|$

$$= 2n + 2 + 3n + 1$$

$$= 5n + 3 \geq n$$

Alamal

وبالتالي علينا إعادة كتابة السلسلة w بالشكل

$w = xyz \quad : \ |xy| \leq n ,$

$1 \leq |y| \leq n$

إن xy تنتمي حتماً إلى القسم الأول من السلسلة w والذي هو عبارة عن a^n أي علينا اختيار $xy = a^n$ ومنه $z = a^n cc b^{3n+1}$ ،

نأخذ $x = a^j$ فتكون $y = a^{n-j}$ فنحصل على w من الشكل

$w = xyz = a^j a^{n-j} a^n cc b^{3n+1}$

وبأخذ $i = 0$ ينتج

$xy^i z = a^j (a^{n-j})^0 a^n cc b^{3n+1}$

$= a^j a^n cc b^{3n+1} = a^{n+j} cc b^{3n+1} \notin L$

ومنه L لغة غير منتظمة ، من غير الضروري أن يكون $j = n$

هل اللغة $L = \{a^{4n} c b^{3n+2} : n \geq 0\}$ منتظمة ؟

حل بطريقة مشابهة لما سبق .

هل اللغة $L = \{0^{2^n} : n \geq 1\}$ منتظمة ؟

نفرض جدلاً أن اللغة L منتظمة ، عندئذٍ حسب توطئة الضخ يوجد ثابت $n \geq 1$ بحيث يكون من أجل كل سلسلة $w \in L$ حيث $w = 0^{2^n}$

$|w| = |0^{2^n}| = 2n \geq n$

وبالتالي يمكن كتابة w بشكل آخر

$w = xyz \quad , \ |xy| \leq n \quad , \ 1 \leq |y| \leq n$

و

$xy = 0^n$, $z = 0^{2^n - n}$

ومنه باختيار

$x = 0^j$, $y = 0^{n-j}$

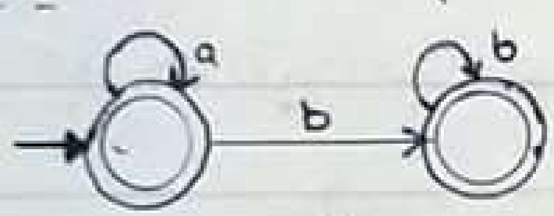
باختيار $i=0$ فإنّ

$$xy^iz = 0^j (0^{n-j})^0 \, 0^{2^n-n} = 0^j \, 0^{2^n-n} = 0^{2^n-(n-j)}$$

نلاحظ أن هذا ليس محقق دوماً من أجل أي حالة تكون فيها $(n-j)$ فردي، فإنّ $xy^iz \notin L$ ومنه L لغة غير منتظمة.

هل اللغة $L = \{w \in \{a,b\}^*\}$ بحيث تحوي أعداد متساوية من a و b لغة منتظمة؟

إن $L_1 = \{a^*, b^*\}$ لغة منتظمة، لأنه يوجد أتومات منتهي يقبلها



إذا فرضنا جدلاً أنّ L لغة منتظمة،

فعندئذ حسب خواص الإغلاق للغات المنتظمة

يجب أن يكون تقاطع اللغتين $L_1 = \{a^* b^*\}$ هو لغة منتظمة

أي $L \cap L_1 = L \cap \{a^*b^*\}$

$= \{a^n b^n : n \geq 0\}$

ولكن من توطئة الضخ برهنا سابقاً (بالامتحان يجب ذكر البرهان) أنّ L_2 لغة غير منتظمة ومنه الفرض الجدلي خاطئ و L لغة غير منتظمة

توضيح:

$L = \{\varepsilon, ab, ba, aabb, bbaa, abab, abba, baab, baba, \ldots\}$

$L_1 = \{\varepsilon, a, aa, \ldots, b, bb, \ldots, ab, aab, abb, abbb, aabb, aaab, \ldots\}$

ويكون

$L \cap L_1 = \{\varepsilon, ab, aabb, \ldots\}$

ملاحظة: إذا كانت اللغة غير منتهية منتظمة فيمكن إيجاد اتومات منتهي حتمي يقبلها، وللاتومات المنتهي الحتمي عدد من الحالات ولتكن n (حيث n هي عدد حالات الاتومات المنتهي الحتمي الأصغري،

عا أن اللغة غير منتهية فبعض سلاسل اللغة طولها أكبر تماماً من n فمن أجل سلسلة أطول تماماً من L ومقبولة من الاتومات المنتهي الحتمي الأصغري فقبول هذه السلسلة يجب أن يحوي على دائرة (دورة) والدوران الاختياري عدد من المرات يجب أن يعطي سلسلة أخرى مقبولة من الاتومات المنتهي الحتمي الأصغري السابق.

اللغات خارج السياق Context free languge (CFL)

تصنف اللغات حسب هرمية تشومسكي إلى أربع أصناف وهي كالتالي:

اللغات المنتظمة: أداة التعرف عليها هو الاتومات المنتهي وأداة توليدها النموذج القواعدي المنتظم.

اللغات خارج السياق: أداة التعرف عليها هو الاتومات عكسي Pushdown Automata وأداة توليدها هو النموذج القواعدي خارج السياق.

اللغات بسياق: أداة التعرف عليها هو الاتومات المحدود خطياً وأداة توليدها هو النموذج القواعدي بسياق.

اللغات القابلة للعد عودياً (غير المحدودة): أداة التعرف عليها هي آلة تورنغ Turing Machine وأداة توليدها النموذج القواعدي غير المقيد.

ملاحظة: كل صنف من تلك اللغات يشمل جميع الصنوف السابقة له، أي أن كل لغة منتظمة هي لغة خارج السياق ولكن العكس غير صحيح.

ارقمنا