محاضرة 21   / /

$\frac{9}{154}$ ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية من الشكل.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & ; \quad]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ولكن $Y = \sin X$ $\quad Z = \cos X$

* عين دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير Y و دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير Z

الحل: $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x > 0$

إذاً الدالة $y = \sin x$ متزايدة دوماً $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\underbrace{y = \sin x}_{g} \iff \underbrace{x = \arcsin y}_{h}$$

$$f_Y(y) = f_X(\arcsin y)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير Y

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & ; \quad -1 < y < 1 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

للتأكد من أن المجال $-1 < y < 1$ صحيح نأخذ: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,dy$

$$\int_{-1}^{1} f_Y(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\pi}\left[\arcsin y\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \boxed{1}$$

$$z = \cos x \Rightarrow z' = -\sin x$$

متزايدة عند $]-\frac{\pi}{2}, 0[$

متناقصة عند $]0, \frac{\pi}{2}[$

نميز حالتين:

أولاً: عندما $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$

$$f_1(z) = f_X(\arccos z) \left|\frac{dx}{dz}\right| = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \quad 0 < z < 1$$

ثانياً: عندما $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$$f_2(z) = f_X(\arccos z) \left|\frac{dx}{dz}\right| = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

وبالتالي يكون:

$$f_Z(z) = f_1(z) + f_2(z) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-z^2}}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\sqrt{1-z^2}} & ; 0 < z < 1 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

/ /

13/155 ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & ; x \geq 1 \\ 0 & ; x < 1 \end{cases}$$

عيّن كثافة المتغير $Y = e^{-X}$

الحل:

$y = e^{-x} \Rightarrow y' = -e^{-x} < 0$

$\ln y = \ln e^{-x}$

$\ln y = -x$

$x = -\ln y$

$f_Y(y) = f_X(-\ln y)\left|-\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{y(\ln y)^2}$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y(\ln y)^2} & ; 0 < y < e^{-1} \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

للتأكد: نكامل ويجب أن يكون الجواب يساوي 1

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^{-X} \leq y) = P(-X \leq \ln y)$

$= P(X \geq -\ln y)$

$= 1 - P(X < -\ln y)$

$= 1 - F_X(-\ln y)$

$F_X(y) = \int_1^y f_X(x)\,dx = \int_1^y \frac{1}{x^2}\,dx$

$= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^y$

$= 1 - \frac{1}{y} \Rightarrow F_Y(y) = 1 - \left[1 + \frac{1}{\ln y}\right] = -\frac{1}{\ln y}$ (ينفع)

/ /

$\frac{16}{156}$ ليكن X , Y متغيرين عشوائيين مستقلين حيث كثافة كل منهما بالشكل التالي:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & ; \ 0 < x < 1 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & ; \ 0 < y < 1 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

لنأخذ: $U = X + Y$, $V = X - Y$ عيّن كثافة (U, V) ثم عيّن الكثافات الهامشية لـ U , ولـ V

الحل:

$$\left.\begin{aligned} u &= x + y \\ v &= x - y \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{بالحل المشترك}} \underbrace{x = \frac{u+v}{2}}_{h_1}$$

$$\underbrace{y = \frac{u-v}{2}}_{h_2}$$

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) |J|$$

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = 1 \quad ; \ 0 < x < 1 \ ; \ 0 < y < 1$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \frac{u-v}{2} \leq 1 \quad , \quad 0 \leq \frac{u+v}{2} \leq 1$$

$$0 \leq u - v \leq 2 \qquad \boxed{-u \leq v \leq 2-u}$$

$$-u \leq -v \leq 2-u$$

$$\boxed{u \geq v \geq u-2}$$

* كثافة U :

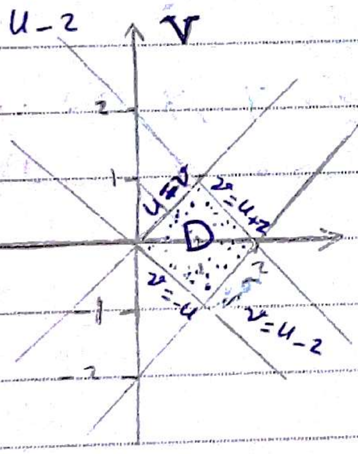
مجال $0 < u \leq 1$

$$f_U(u) = \int_{-u}^{+u} \frac{1}{2}\, dv = \left[\frac{1}{2} v\right]_{-u}^{+u}$$

$$= \frac{1}{2} u + \frac{1}{2} u = u$$

مجال $1 \leq u \leq 2$

$$f_U(u) = \int_{u-2}^{-u+2} \frac{1}{2}\, dv = \left[\frac{v}{2}\right]_{u-2}^{-u+2}$$



$$= \frac{-u+2}{2} - \frac{u-2}{2} = \frac{-u+2-u+2}{2}$$

$$= \frac{-2u+2}{2}$$

$$= \frac{-2(u-1)}{2}$$

$$= -u+1$$

$$f_U(u) = \begin{cases} u & ; \ 0 \leq u \leq 1 \\ -u+1 & ; \ 1 \leq u \leq 2 \end{cases}$$

/ /

* كثافة V:
من أجل $-1 \leq v \leq 0$;
$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(u,v)\, du = \int_{-v}^{v+2} \frac{1}{2}\, dv$$
$$= v + 1$$

من أجل $0 \leq v \leq 1$
$$f_V(v) = \int_{v}^{2-v} \frac{1}{2}\, du$$
$$= \left[\frac{u}{2}\right]_{v}^{2-v} = \frac{2-v}{2} - \frac{v}{2} = \frac{2-2v}{2} = 1-v$$

$$f_V(v) = \begin{cases} v+1 & -1 \leq v \leq 0 \\ 1-v & 0 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

ملاحظة: الكثافة الهامشية = التكامل الوسيط
هي ذاتها

مثال: ليكن X، Y متغيرين عشوائيين على المجال $[0,1]$، مستقلين
المطلوب: * أوجد دالة توزيع $U = X + Y$ ، $V = X$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & ; \ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & ; \ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

بالحل المشترك للمعادلتين U و V نجد:
$x = v$ ، $y = u - v$

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(x,y)\ |J|$$

$$= f_{X,Y}(v, u-v) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$0 \leq u - v \leq 1 \quad , \quad 0 \leq v \leq 1$$

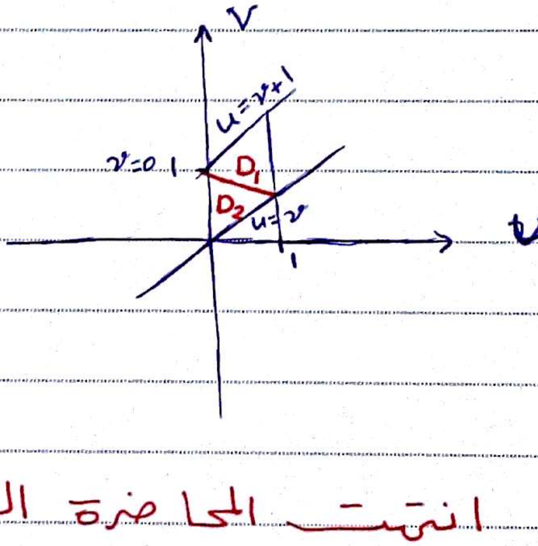
$$v \leq u \leq 1 + v$$

$$\iint_D f_{U,V}(u,v)\, du\, dv = \int_0^1 \left[\int_v^{v+1} f_{U,V}(u,v)\, du \right] dV$$

$$f_V(v) = \int_v^{v+1} du = [u]_v^{v+1} = 1$$

$$f_U(u) = \int_0^u dv = u$$

$$f_U(u) = \int_{u-1}^1 dv = [v]_{u-1}^1 = 1 - (u-1) = 2 - v$$



انتهت المحاضرة الواحد وعشرون ((الثالثة عملي))