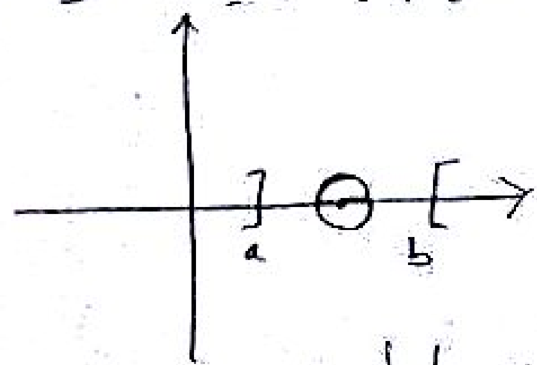
(1)

حل مجموعة من التمارين في التحليل العقدي (1)

1- هل المجموعة المفتوحة في $\mathbb{R}$ مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$ ؟ علل إجابتك

<u>الجواب</u> : لا .

لو أخذنا أي مجال مفتوح في $\mathbb{R}$ ($]a,b[$) وهو مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ فإننا نجد أن جميع نقاطه ليست داخلية فيه باعتباره مجموعة جزئية من $\mathbb{C}$ فلا يمكن لأي قرص مفتوح مركزه نقطة من $]a,b[$ أن يكون محتوى في المجال $]a,b[$ ، انظر الشكل :



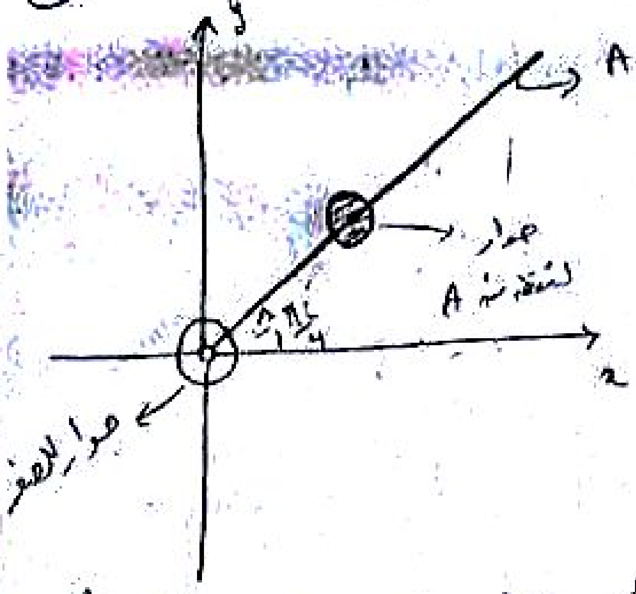
2- ما هي نقطة تجمع المجموعة $\{\frac{1}{n} \; ; \; n\in\mathbb{N}^*\}$ ؟

<u>الجواب</u> : نقطة تجمع المجموعة $\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}^*\}$ هي الصفر لأنه أي جوار له (للصفر) سيحوي عدداً غير منتهٍ من عناصر هذه المجموعة بل كل عناصر المجموعة باستثناء عدد منتهٍ منها وذلك لأنه $(\frac{1}{n} \to 0)$.

3- مثّل هندسياً مجموعة الأعداد العقدية المحققة لما يلي وبيّن أيّاً منها مجموعة مغلقة ، مفتوحة ، محدودة ، مترابطة ، متراصة ، منطقة :

1/ $A = \{ z \; : \; \operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{4} \}$

إن A هي مجموعة نقاط المستوي التي تكون القيمة الرئيسية لزاويتها مساوية لـ $\frac{\pi}{4}$ وهي إذاً نصف منصف الربع الأول والثالث الواقع في الربع الأول باستثناء المبدأ (حيث أن زاوية المبدأ غير معينة)



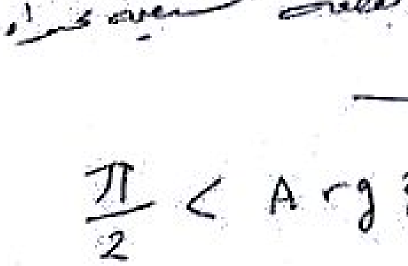
ليست مفتوحة لأن أي نقطة منها ليست
داخلية فيها فأي جوار لأي نقطة فيها سيحوي
نقاطاً القيمة الرئيسية لزاويتها لا تساوي $\frac{\pi}{4}$
وبالتالي A ليست منطقة .

* وهي ليست مغلقة حيث أن الصفر المنتمي
لمتممتها ليس نقطة داخلية في المتممة فأي جوار له سيحوي نقاطاً
من A (أي ليس محتوى في المتممة) .
* وبالتالي A غير متراصة لأنها غير مغلقة .
* A ليست محدودة : فلو فرضنا جدلاً أنها محتواة في القرص $D(0,M)$
فإن النقطة $(M+1)+i(M+1)$ نقطة من A وهي غير منتمية للقرص فالفرض الجدلي خاطئ .
* A محدبة لأنه يمكن وصل أي نقطتين منها بقطعة مستقيمة محتواة فيها وبالتالي
A مترابطة .

---

2) $\frac{\pi}{2} < Arg\, z \le \frac{\pi}{2}$

لو رمزنا بـ B لمجموعة النقاط z المحققة للمتراجحتين السابقتين معاً
فإن B مساوية لمجموعة نقاط القطاع الزاوي الذي رأسه المبدأ
وضلعاه نصفا المستقيمين: منصف الربع الأول (الموجود في الربع الأول)
والجزء الموجب من المحور oy وبدون نقاط منصف الربع الأول .



وهذه المجموعة ليست مفتوحة لأن نقاط
الجزء الموجب من oy ليست داخلية في B
(وهي نقاط من B)
وبالتالي B ليست منطقة .

كذلك B ليست مغلقة لأن نقاط نصف المحور الأول ليست داخلة بالمجموعة

(طبعاً المجموعة ليست مفتوحة). فهي ليست ساحة.

المجموعة B ممتدة (لكن يمكن الوصل بين أي نقطتين منها بقطعة مستقيمة واقعة فيها) فهي مترابطة

وهي ليست محدودة ومفتوحة.

---

3) $|z-1| < \operatorname{Im} z$

بما أن $|z-1| \geq 0$ فإن z المحققة للمتراجحة السابقة يجب أن تحقق $0 < \operatorname{Im} z$ أي يجب أن تكون واقعة في النصف الأعلى من المستوي (الواقع على يمين Oy) دون Oy. وإذا كانت كذلك فإن حلول المتراجحة هي حلول المتراجحة بعد تربيع طرفيها أي:

$$|z-1|^2 < (\operatorname{Im} z)^2$$

أي $(x-1)^2 + y^2 < y^2$

أي $(x-1)^2 < 0$

وهذه مستحيلة

مجموعة النقاط المحققة للمتراجحة $|z-1| < \operatorname{Im} z$ خالية فهي مفتوحة ومغلقة.

---

4) $|z-1| + |z+1| > 2$

لنلاحظ أنه

$$2 = |1-(-1)| = |1 - z + z + 1| \leq |1-z| + |z+1|$$

$$\Rightarrow \quad 2 \leq |z-1| + |z+1|$$

وذلك أياً كانت $z \in \mathbb{C}$.

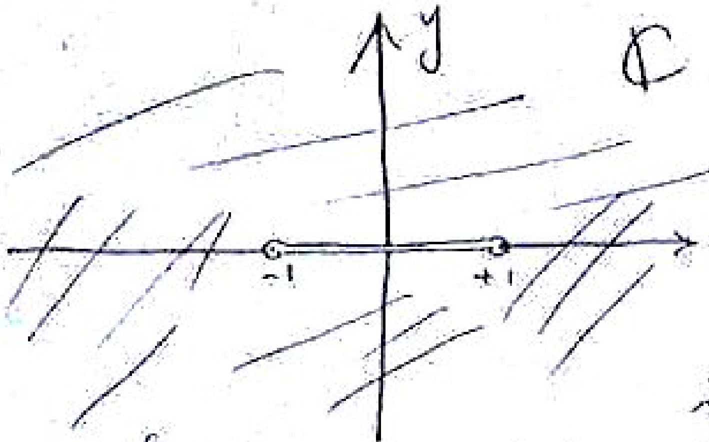
وإذا كانت z في القطعة المستقيمة التي طرفاها 1 و -1 أي المجال $[-1,1]$

المجموع $|z+1|+|z-1|$ يمثل المسافة بين -1 و $+1$ أي يساوي 2

لنقاط القطعة المستقيمة (أي لـ $[-1,+1]$) لا تحقق المتراجحة

$$|z-1|+|z+1|>2$$

أما إذا كانت $z \notin [-1,+1]$ فأصبح مجموع البعدين أكبر تماماً.



والحل المجموعة هي $\mathbb{C} \setminus [-1,+1]$

فإذا رمزنا لهذه المجموعة بـ

D

فإن D مفتوحة حيث أن بعد

أي نقطة منها عن المجال $[-1,+1]$ سيكون

موجباً تماماً ونستطيع أن نوجد لها جواراً (قرصاً مركزه النقطة) محتوى في D

و هي مترابطة فيمكن وصل أي نقطتين منها بخط مضلعي واقع في هذه المنطقة.

D ليست مغلقة لأن متممها $[-1,+1]$ في $\mathbb{C}$ ليست مفتوحة في $\mathbb{C}$.

و D ليست متراصة.

و هي وصف ف ليست محدودة لا يمكنه جعلها محتواة في قرص مركزه المبدأ

3- برهن أن المتتالية $n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ متقاربة وأن نهايتها تساوي الصفر.

الحل:

$$\left|n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right| = n\,\frac{(\sqrt{2})^n}{2^n} = \frac{n}{(\sqrt{2})^n} \longrightarrow 0$$

لأنّ $(\sqrt{2})^n \longrightarrow +\infty$ بشكل أسرع منه n.

ومنه

$$n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n \longrightarrow 0$$

- ادرس التقارب والتقارب بالاطلاق لكل من المتسلسلة :

1) $\sum_{1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$

بما أن $\sum_{1}^{\infty} \left|\frac{i^n}{n^2}\right| = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ و أن $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة فإن $\sum_{1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$ متقاربة بالاطلاق.

2) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n}$

$$\left| \frac{(1+i)^n}{n} \right| = \frac{(\sqrt{2})^n}{n} \longrightarrow +\infty$$

ومنه $\frac{(1+i)^n}{n} \to \infty$ و الحد العام للمتسلسلة لا يؤول إلى الصفر فالمتسلسلة متباعدة.

ط2: ويمكن استخدام معيار الجذر النوني لاثبات تباعد المتسلسلة حيث أن:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(1+i)^n}{n}\right|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} > 1.$$

أو باستخدام دالامبير.

5- احسب نصف قطر تقارب كل من متسلسلات القوى الآتية:

1) $\sum_{1}^{\infty} n z^n$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$$

ومنه $r = \frac{1}{\_} = \frac{1}{1} = 1$ نصف قطر التقارب

2) $$\sum_{1}^{\infty} n^{p} z^{n}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n^{p}} = n^{\frac{p}{n}} \longrightarrow 1$$

$$r = \frac{1}{1} = 1$$

3) $$\sum_{1}^{\infty} \frac{z^{n}}{n^{p}}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^{p}}} = \frac{1}{n^{\frac{p}{n}}} \longrightarrow \frac{1}{1} \Rightarrow r = \frac{1}{1} = 1$$

4) $$\sum_{1}^{\infty} \frac{z^{n}}{n^{n}}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n^{n}} = n \longrightarrow +\infty$$

$$r = 0$$

أي أن المتسلسلة متقاربة فقط عند مركزها (الصفر)

7

لنفرض أن أمثال متسلسلة القوى $\sum_{1}^{\infty} b_n z^n$ أعداد حقيقية موجبة وأن

$b_1 > b_2 > \dots$ وأن $b_n \to 0$

والمطلوب:

① بيّن أن نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} b_n z^n$ يساوي الواحد على الأقل.

② بيّن في حالة $r=1$ أن المتسلسلة متقاربة على محيط قرص التقارب بغض النظر عن $z=1$.

الحل:

$\sum_{1}^{\infty} b_n z^n$ متسلسلة قوى مركزها الصفر متتالية الأمثال الحقيقية الموجبة

نستفيد من صحة المتراجحة

$$\boxed{\underline{\lim}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} \le \overline{\lim}\, \frac{a_{n+1}}{a_n}}$$

لأجل أي متتالية حقيقية حدودها موجبة $\{a_n\}$ (التي نقبل صحة دون ذكر برهانها).

من الفرض نجد:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$$

ومنه

$$\overline{\lim}\, \frac{b_{n+1}}{b_n} \le 1$$

وبالتالي وبالاستفادة من المتراجحة أعلاه نجد أن

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} \le \overline{\lim}\, \frac{b_{n+1}}{b_n} \le 1$$

ومنه إذاً

$$r = \frac{1}{\overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n}} \ge 1$$

(٨)

© : في حالة $r=1$ ، سنثبت أن المتسلسلة متقاربة على المجال نفسه لكن

عند $z=1$ باستخدام اختبار ديركلند وذلك بفرض $b_n = v_n$ و $a_n = z^n$

ومنه الفرض نجد أنه $v_n \longrightarrow 0$ (الشرط الثالث من شروط ديركلند

محقق) . كما أن لـ $\sum a_n$ أي $\sum z^n$ مجاميع جزئية

محدودة (عندما $z \neq 1$ و $|z|=1$) (راجع الاثبات في المحاضرات.

وأخيراً سنثبت أن $\sum(v_n - v_{n+1})$ متقاربة بالاطلاق

أي أن $\sum_{1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ متقاربة بالاطلاق وبما أن المتسلسلة

الأخيرة ذات حدود حقيقية موجبة $(b_n > b_{n+1})$ فإنه تقاربها

يكافئ تقاربها بالاطلاق فيكفي اثبات تقاربها :

$$S_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1})$$

$$= b_1 - \underbrace{b_{n+1}}_{\to 0} \longrightarrow \underbrace{b_1}_{\text{عدد محدود}}$$

ومنه المطلوب .

(٩)

٥) العلاقة بين المسافة الوترية، ونرمز لها بـ d_1 والمسافة الاقليدية بين عددين عقديين

نفرض أن z ، z' عددان عقديان وأن $p_0(x_1, x_2, x_3)$ صورة z على الكرة

و $P'(x_1', x_2', x_3')$ صورة z'

نعلم سابقاً أن

$$x_1 = \frac{2\,\mathrm{Re}\, z}{|z|^2+1} \quad , \quad x_2 = \frac{2\,\mathrm{Im}\, z}{|z|^2+1} \quad , \quad x_3 = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$$

(هذه العلاقات بين احداثيات نقطة z على كرة ريمان وبين احداثيات العدد z في المستوي العقدي)

$$d_1(z_0, z_0') \underset{\text{تعريفاً}}{=} \ell([PP']) = \sqrt{(x_1'-x_1)^2+(x_2'-x_2)^2+(x_3'-x_3)^2}$$

ومنه

$$\left(d_1(z, z')\right)^2 = (x_1')^2+(x_1)^2-2x_1x_1'+(x_2')^2+(x_2)^2-2x_2x_2' + (x_3')^2+(x_3)^2-2x_3x_3'$$

$$= (x_1')^2+(x_2')^2+(x_3')^2+(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2 - 2(x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3')$$

$$= 1 + 1 - 2(x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3')$$

(لأن P و P' نقطتان من الكرة)

$$\left(d_1(z, z')\right)^2 = 2-2\left(\frac{4\,\mathrm{Re}\,z\,\mathrm{Re}\,z' + 4\,\mathrm{Im}\,z\,\mathrm{Im}\,z' + (|z|^2-1)(|z'|^2-1)}{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)}\right)$$

$$= 2\left(\frac{|z|^2|z'|^2+|z|^2+|z'|^2+1-4\,\mathrm{Re}\,z\,\mathrm{Re}\,z'-4\,\mathrm{Im}\,z\,\mathrm{Im}\,z'-|z|^2|z'|^2+|z|^2+|z'|^2}{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)}\right.$$

(1)

$$\left(d_1(z,z')\right)^2 = 2\,\frac{2\left(|z|^2+|z'|^2-2\left(\operatorname{Re}z\operatorname{Re}z'+\operatorname{Im}z\operatorname{Im}z'\right)\right)}{\left(|z|^2+1\right)\left(|z'|^2+1\right)}$$

$$= \frac{4\left(|z|^2+|z'|^2-2\left(\operatorname{Re}z\operatorname{Re}z'+\operatorname{Im}z\operatorname{Im}z'\right)\right)}{\left(|z|^2+1\right)\left(|z'|^2+1\right)}$$

$$\left(d(z,z')\right)^2 = |z-z'|^2 = (z-z')\overline{(z-z')} = (z-z')(\bar z-\bar z')$$

$$= z\cdot\bar z + z'\cdot\bar z' - z\bar z' - \bar z z'$$

$$= |z|^2+|z'|^2 - 2\operatorname{Re}(z\cdot\bar z')$$

(ملاحظة أن $\bar z\cdot z' = \overline{(z\cdot\bar z')}$) ، بما أن

$$z\cdot\bar z' = (\operatorname{Re}z + i\operatorname{Im}z)\cdot(\operatorname{Re}z' - i\operatorname{Im}z')$$

$$= \operatorname{Re}z\cdot\operatorname{Re}z' + \operatorname{Im}z\operatorname{Im}z' + i\left(\operatorname{Re}z'\operatorname{Im}z - \operatorname{Re}z\operatorname{Im}z'\right)$$

نلاحظ أن

$$\left(\operatorname{Re}(z\cdot\bar z')\right) = \operatorname{Re}z\cdot\operatorname{Re}z' + \operatorname{Im}z\operatorname{Im}z'$$

$$\left(d(z,z')\right)^2 = |z|^2+|z'|^2-2\left(\operatorname{Re}z\operatorname{Re}z'+\operatorname{Im}z\operatorname{Im}z'\right)$$ ينتج:

النتيجة :

$$\left(d_1(z,z')\right)^2 = \frac{4\left(d(z,z')\right)^2}{\left(|z|^2+1\right)\left(|z'|^2+1\right)}$$

وعليه

$$d_1(z,z') = \frac{2\,d(z,z')}{\sqrt{\left(|z|^2+1\right)\left(|z'|^2+1\right)}}$$

المسافة الوترية بين نقطة z بالمستوى العقدي وبين اللانهاية

لو كانت $z' = \infty$ فإن

$$(d_1(z,\infty))^2 = \ell^2(PN) = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (1-x_3)^2}\right)^2$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 - 2x_3$$

$$= 2(1-x_3) = 2\left(1 - \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$$

$$= 2\left(\frac{|z|^2+1-|z|^2+1}{|z|^2+1}\right)$$

$$= \frac{4}{|z|^2+1}$$

$$\boxed{d_1(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}}}$$

على سبيل المثال لو كانت $z = 0$ (المبدأ) فإن

$$d_1(0,\infty) = \frac{2}{\sqrt{0+1}} = 2$$

(هي فعلاً ~~المسافة~~ طول الوتر بين القطبين الشمالي والجنوبي).

ملاحظة: المسافة المألوفة معرفة بين عددين عقديين فقط.