2014 ث2

الجمهورية العربية السورية
جامعة دمشق
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الثاني للعام الدراسي2014/2013
مقرر نظرية البيان
لطلاب السنة الثالثة

اسم الطالب:

أجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الأول: (10 درجات)

لتكن لدينا مجموعة المحارف $C = \{d, f, i, n, m\}$ ولتكن الدالة $f : C \to Z$ معرفة كما يلي:

$f(d) = 10, f(f) = 9, f(i) = 7, f(n) = 26, f(m) = 6$ أوجد ما يلي:

1- شجرة هوفمان
2- شيفرة هو فمان للمجموعة C .
3- وزن الشيفرة
4- شفر الكلمة التالية "mind".
5- فك الشيفرة التالية: 00101110101000.

السؤال الثاني: (40 درجة)

ليكن لدينا البيان الموجه الموافق للمصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} \infty & 5 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & \infty & 4 & 9 & 4 \\ 4 & 5 & \infty & 11 & 10 \\ 7 & 4 & 3 & \infty & 6 \\ 8 & 6 & 2 & 7 & \infty \end{bmatrix}$$

1- ارسم البيان $\vec{G}(V;\vec{E})$ الموافق للمصفوفة السابقة.
2- طبق خوارزمية كاسكادا لإيجاد المسار الأصغر من العقد V_1 إلى العقدة V_5.
3- طبق خوارزمية ريجكستر لإيجاد المسار الأصغر من العقد V_1 إلى العقدة V_5..

السؤال الثالث: (35 درجة)

لكن لدينا البيان $G(V;E)$ مجموعة عقدة $V = \{v_1; v_2; v_3; v_4; v_5; v_6; v_7; v_8\}$ ومجموعة الأضلاع

$$E = \{e_1 = (v_1, v_2); e_2 = (v_2, v_3); e_3 = (v_2, v_7); e_4 = (v_2, v_8);$$

$$e_5 = (v_3, v_4); e_6 = (v_3, v_7); e_7 = (v_4, v_6); e_8 = (v_5, v_6); e_9 = (v_6, v_7); e_{10} = (v_7, v_8)\}$$

1. ارسم البيان G(V;E)
2. أوجد البيان المرافق G(V;E)
3. اوجد مصفوفة الدوائر الأساسية بعد تحديد شجرة مشدودة على البيان السابق.
4. اوجد مصفوفة القطع الأساسية وفق الشجرة السابقة.

السؤال الرابع: (15 درجات)

ليكن لدينا لبيان البسيط G(V;E) إذا وجد $x, y \in V$ و $x \neq y$ حيث يوجد ممران مختلفان من x إلى y فإن البيان يحتوي على دائرة.

دمشق في 2014/6/15

مع تمنياتي لكم بالنجاح

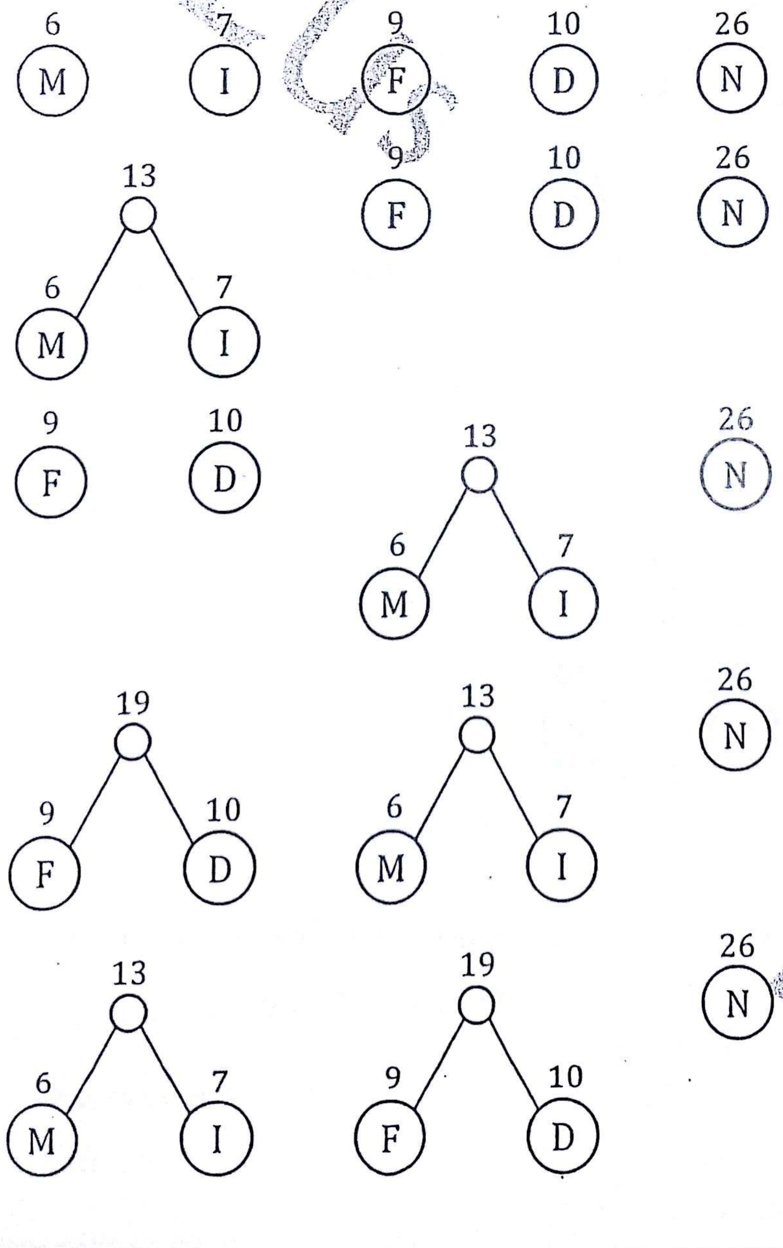
أستاذ المقرر

أ.د. خالد الخنيفس

حل دورة 2013-2014 الفصل الثاني

السؤال الأول :

1) ملاحظة قبل البدء : تمت كتابة الاحرف كبيرة من أجل أن تكون واضحة أما في الامتحان يجب التقيد بحالة الاحرف (A أو a) .



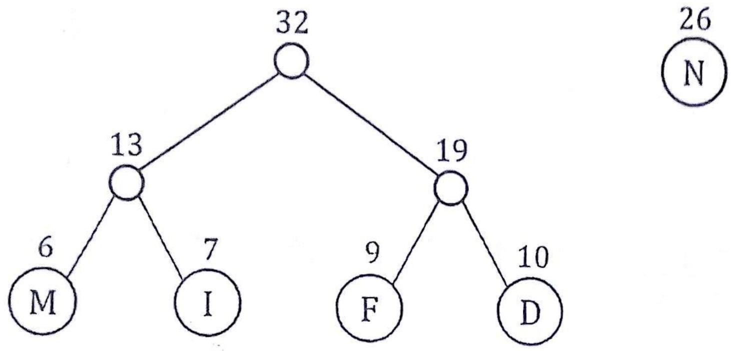
الحل:

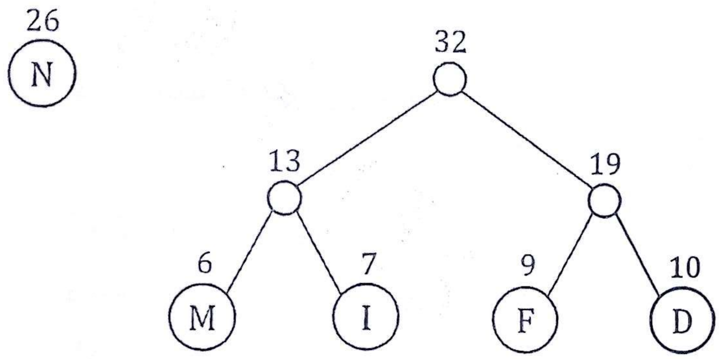
أولا : نرسم العقد ونرقم كل منها ونرتبها حسب قيمها .

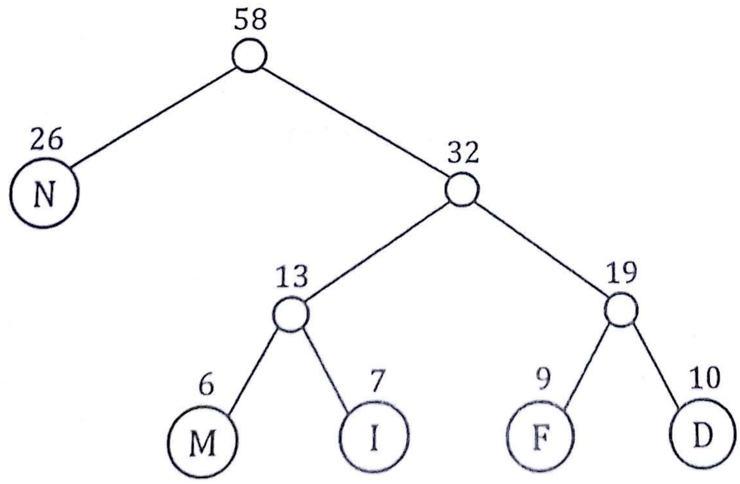
ثانيا : ندمج العقدتين اللتان تقابلان أصغر قيمتين في عقدة جديدة (كما في الشكل) تكون قيمتها هي مجموع قيمتي العقدتين .

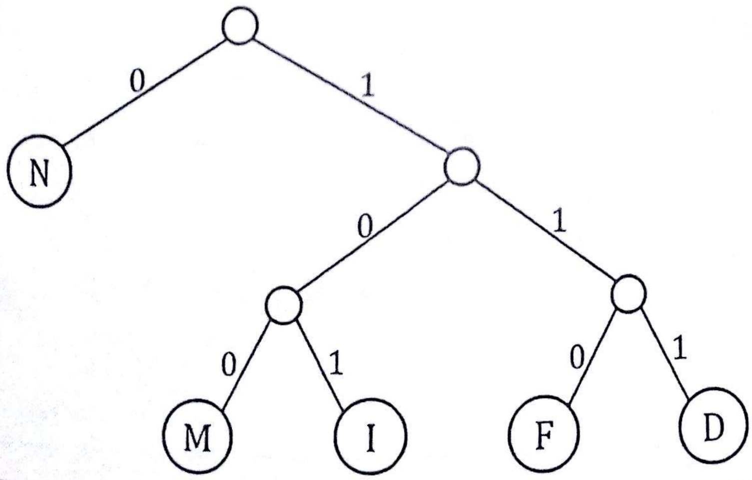
ثالثاً : نعيد ترتيب العقد من جديد وفي حال تساوي قيمتي عقدتين لا نجري تبديل .

نكرر الخطوات السابقة حتى نحصل على عقدة واحدة .









2) نرقم الأضلاع بحيث الضلع التي على اليمين تأخذ القيمة 1 و الضلع التي على اليسار تأخذ القيمة 0 ، ونكتب الجدول :

C	M	I	F	D	N
$f(C)$	6	7	9	10	26
$Code$	100	101	110	111	0

3) وزن شيفرة هوفمان ذات طول متغير هو :

$$D = f(M) \times L(\bar{M}) + f(I) \times L(\bar{I}) + f(F) \times L(\bar{F}) + f(D) \times L(\bar{D}) + f(N) \times L(\bar{N})$$

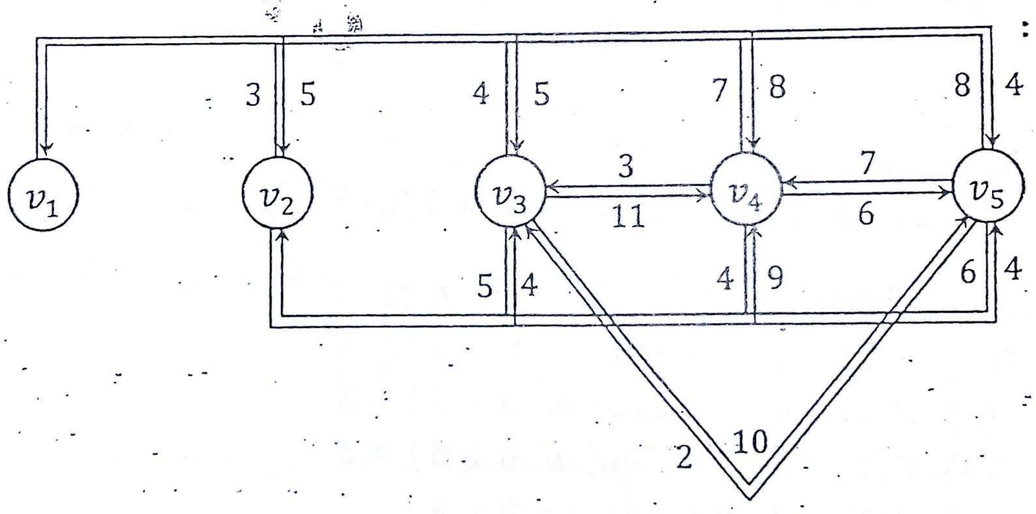
$$D = 6 \times 3 + 7 \times 3 + 9 \times 3 + 10 \times 3 + 26 \times 1 = 122$$

4) من الجدول نلاحظ أن شيفرة كلمة $mind$ هو : 1001010111 .

5) من الجدول نلاحظ أن فك الشيفرة 00101110101000 هو : $nnifinnn$.

السؤال الثاني:

1) الرسم :



2) طريقة كاساكادا : نكتب مصفوفة الأبعاد :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 9 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 11 & 10 \\ 7 & 4 & 3 & 0 & 6 \\ 8 & 6 & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^2 = B \oplus B =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 9 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 11 & 10 \\ 7 & 4 & 3 & 0 & 6 \\ 8 & 6 & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 9 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 11 & 10 \\ 7 & 4 & 3 & 0 & 6 \\ 8 & 6 & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 9 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 11 & 8 \\ 7 & 4 & 3 & 0 & 6 \\ 6 & 6 & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^3 = B^2 \oplus B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 9 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 11 & 8 \\ 7 & 4 & 3 & 0 & 6 \\ 6 & 6 & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 9 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 11 & 10 \\ 7 & 4 & 3 & 0 & 6 \\ 8 & 6 & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 8 & \boxed{4} \\ 3 & 0 & 4 & 9 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 11 & 8 \\ 7 & 4 & 3 & 0 & 6 \\ 6 & 6 & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} = B^2$$

ومنه أقصر مسار بين العقدة v_1 والعقدة v_5 هو المسار المباشر بين العقدتين و الذي هو : $v_1 \xrightarrow{4} v_5$

3) طريقة ديجكستر :

نفرض أن $P(1) = 0$ وأن $T(k) = \infty : k = 2,3,4,5$ ولنحسب قيمة $P(2)$:

نعلم أن : $d_{1\,2} = 5$ و $d_{1\,3} = 5$ و $d_{1\,4} = 8$ و $d_{1\,5} = 4$ ومنه :

$$T(2) = \min\{\, T(2)\,, P(1) + d_{1\,2}\} = \min\{\, \infty\,, 0 + 5\,\} = 5$$
$$T(3) = \min\{\, T(3)\,, P(1) + d_{1\,3}\} = \min\{\, \infty\,, 0 + 5\,\} = 5$$
$$T(4) = \min\{\, T(4)\,, P(1) + d_{1\,4}\} = \min\{\, \infty\,, 0 + 8\,\} = 8$$
$$T(5) = \min\{\, T(5)\,, P(1) + d_{1\,5}\} = \min\{\, \infty\,, 0 + 4\,\} = 4$$
$$\Rightarrow P(2) = \min\{T(2)\,, T(3)\,, T(4)\,, T(5)\,\}$$
$$= \min\{5\,, 5\,, 8\,, 4\} = 4$$

لنحسب $P(3)$: نعلم أن $d_{2\,3} = 4$ و $d_{2\,4} = 9$ و $d_{2\,5} = 4$ ومنه :

$$T(3) = \min\{5\,, 4 + 4\} = 5 \quad \& \quad T(4) = \min\{8\,, 4 + 9\} = 8$$
$$T(5) = \min\{4\,, 4 + 4\} = 4 \qquad \Rightarrow P(3) = \min\{5\,, 8\,, 4\} = 4$$

لنحسب $P(4)$: نعلم أن $d_{3\,4} = 11$ و $d_{3\,5} = 10$ ومنه :

$$T(4) = \min\{8\,, 4 + 11\} = 8 \quad \& \quad T(5) = \min\{4\,, 4 + 10\} = 4$$
$$\Rightarrow P(4) = \min\{8\,, 4\} = 4$$

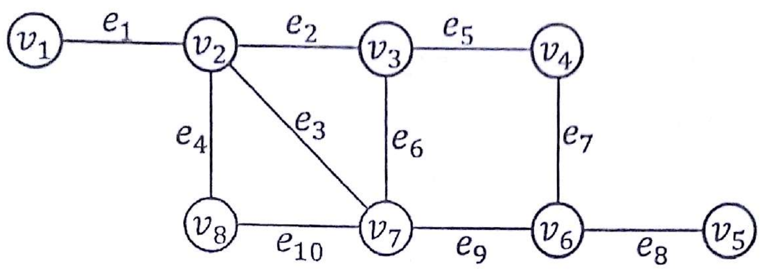
لنحسب $P(5)$: نعلم أن $d_{4\,5} = 6$ ومنه :

$$T(5) = \min\{4\,, 4 + 6\} = 4 \qquad \Rightarrow P(5) = \min\{\, T(5)\} = 4$$

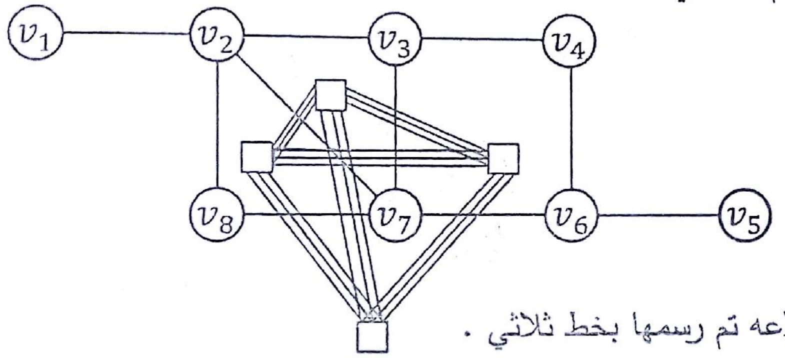
ومنه أقصر مسار بين العقدة v_1 والعقدة v_5 هو المسار المباشر بين العقدتين و الذي هو : $v_1 \xrightarrow{4} v_5$.

السؤال الثالث:

1) الرسم :

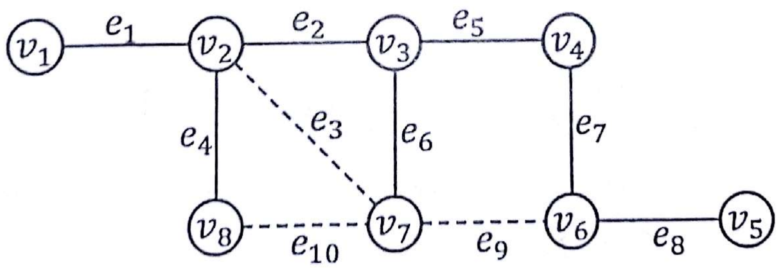


2) البيان المرافق (لم يتم اعطائه في العام الدراسي 2015/2014) :



ان المربعات هي عقد البيان المرافق واضلاعه تم رسمها بخط ثلاثي .

3) لإيجاد مصفوفة الدوائر الاساسية لابد من تحديد شجرة مشدودة على البيان ، إن الشكل التالي يمثل شجرة مشدودة على هذا البيان حيث الاضلاع المنقطة هي الأوتار



إن الدوائر الموجودة في البيان هي :

$$C_1 =< e_3, e_4, e_{10} > \ , \quad C_2 =< e_2, e_3, e_6 > \ , \quad C_3 =< e_5, e_6, e_9, e_7 >$$
$$C_4 =< e_2, e_4, e_{10}, e_6 > \ , \quad C_5 =< e_2, e_5, e_7, e_9, e_{10}, e_4 >$$

الاساسية منها هي : C_2 , C_3, C_4 ومنه مصفوفة الدوائر الاساسية هي :

$$C_{G_f} = \begin{array}{c} C_{f_1} \\ C_{f_2} \\ C_{f_3} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) إن مجموعات القطع الأساسية هي :

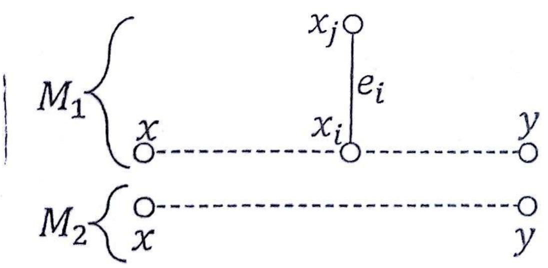
$$K_{f_1} =< e_1 > \;,\; K_{f_2} =< e_2, e_3, e_{10} > \;,\; K_{f_3} =< e_4, e_{10} > \;,\; K_{f_4} =< e_5, e_9 >$$
$$K_{f_5} =< e_6, e_3, e_9, e_{10} > \;,\; K_{f_6} =< e_7, e_9 > \;,\; K_{f_7} =< e_8 >$$

ومصفوفة القطع الأساسية هي :

$$C_{G_f} = \begin{array}{c} C_{G_1} \\ C_{G_2} \\ C_{G_3} \\ C_{G_4} \\ C_{G_5} \\ C_{G_6} \\ C_{G_7} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

السؤال الرابع :

لنفرض أن $x, y \in V$, $x \neq y$ وبفرض لدينا الممرين المختلفين $M_1 \neq M_2$ ولنثبت أنه يوجد C بحيث $C \in G$ ، لنناقش الحالات التالية بالنسبة للمسارين :



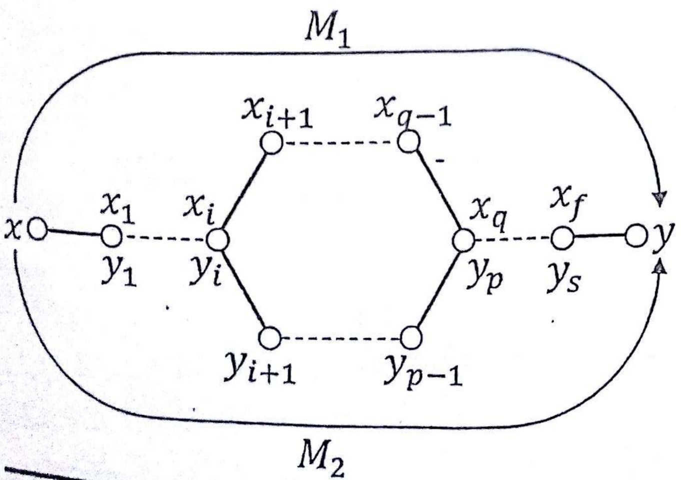
I) حالة الفرق بينهما هو عقدة (و ضلع) : هذه الحالة واضحة حيث الدائرة هي فقط : $< x_i, e_i, x_j, e_i, x_i >$

II) حالة الفرق بينهما أكثر من عقدة (أي أكثر أو يساوي 3 أضلاع) :

لنرقم المسار الأول $(1 : f)$ والمسار الثاني $(1 : s)$ ولنشكل المجموعة A بحيث :

$$A = \{r : i < r \leq f \;;\; x_r = y_t \;:\; i < t \leq s \;;\; x_{r-1} \neq y_{t-1}\}$$

(أي أن r متحول على دليل المسار M_1 والتي يتحقق عندها انطباق عقدتين من M_1 و M_2 و العقدتين اللتان قبلهما مباشرة مختلفتين) ،



إن A غير خالية لأنه : بما أن $x_f = y_s$ و $i < s \leq s$ و $i < f \leq f$ فإن $f \in A$ ،

ولنفرض أن دليل أول عقدة من المسار الأول و التي تطابق عقدة من المسار الثاني هو q أي

$x_q = y_p$ فيكون لدينا المسارين

$L_2 =< y_p, \dots, y_i = x_i >$ و $L_1 =< x_i, \dots, x_q = y_p >$

ومنه يكون المسار $L = L_1 \cup L_2 =< x_i, \dots, x_q = y_p, \dots, y_i = x_i >$ دائرة .

انتهى حل دورة 2013-2014 الفصل الثاني

2014 تكميلي

الجمهورية العربية السورية
جامعة دمشق
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الاضافية للعام الدراسي 2014/2013
مقرر نظرية البيان
لطلاب السنة الثالثة

اسم الطالب:

أجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الأول: (15 درجة)

ليكن لدينا البيان $G=(V_1,V_2,V_3;E)$ بيان متعدد الاجزاء (ثلاث أجزاء) تام بحيث $|V_1|=n_1;|V_2|=n_2;|V_3|=n_3$ علما أن $|V|=n=n_1+n_2+n_3$ أحسب $|E|$.

السؤال الثاني: (35 درجة)

لكن لدينا البيان $G(V;E)$ مجموعة عقدة $V=\{v_1;v_2;v_3;v_4;v_5;v_6;v_7;v_8\}$ ومجموعة الأضلاع

$$E=\{e_1=(v_1,v_2);e_2=(v_2,v_3);e_3=(v_2,v_7);e_4=(v_2,v_8);$$

$$e_5=(v_3,v_4);e_6=(v_3,v_7);e_7=(v_4,v_6);e_8=(v_5,v_6);e_9=(v_6,v_7);e_{10}=(v_7,v_8)\}$$

1. ارسم البيان $G(V;E)$
2. اوجد مصفوفة الدوائر الأساسية بعد تحديد شجرة مشدودة على البيان السابق.
3. اوجد مصفوفة القطع الأساسية وفق الشجرة السابقة.

السؤال الثالث: (30 درجة)

لكن لدينا البيان الموجه الموزون $\vec{G}(V;\vec{E})$ مجموعة عقدة $V=\{v_1;v_2;v_3;v_4;v_5\}$ ومجموعة الأقواس

$$\vec{E}=\{\vec{e_1}=[v_1,v_2]=5;\vec{e_2}=[v_1,v_5]=10;\vec{e_3}=[v_2,v_3]=6;\vec{e_4}=[v_3,v_5]=5;$$

$$\vec{e}_5=[v_3,v_1]=5;\vec{e}_6=[v_4,v_1]=3;\vec{e}_7=[v_4,v_3]=3;$$

$$\vec{e}_8=[v_4,v_5]=3;\vec{e}_9=[v_5,v_2]=4;\}$$

أوجد ما يلي:

1- ارسم البيان $\vec{G}(V;\vec{E})$.

2- استخدام خوارزمية كاسكادا لإيجاد اقصر مسافة بين v_1 و v_5.

3- طبق خوارزمية ديجكستر لإيجاد أقصر طريق بين عقدة البداية وعقدة النهاية.

السؤال الربع: (20 درجة)

1. ليكن لدينا لبيان البسيط G(V;E) بحيث $|V|>1$ عندئذ يكون البيان G بيان زوجي إذا وفقط إذا كان البيان G لايحتوي على دوائر فردية.
2. يكون البيان $G=(V;E)$ بيان أولر إذا وفقط إذا كان البيان G بيان مترابط وكانت جميع عقدة زوجية.

دمشق في 2014/9/6

مع تمنياتي لكم بالنجاح

أستاذ المقرر

أ.د. خالد الخنيفس

-١٠-

حل دورة 2013-2014 التكميلية

السؤال الأول :

بما أن البيان متعدد الاجزاء وتام فهذا يعني أن كل عقدة من جزء ما ترتبط بجميع العقد التي تنتمي للبيان ولا تنتمي لنفس جزء هذه العقدة أي :

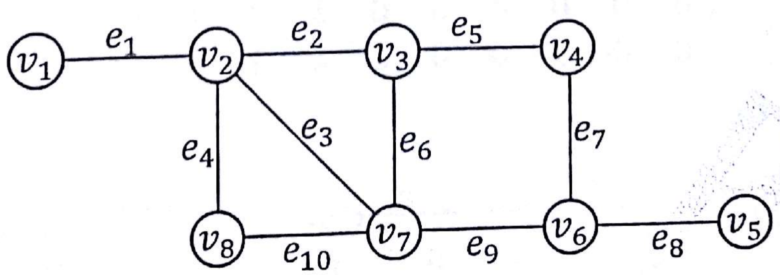
$$\forall x \in V_1 : \deg(x) = n_2 + n_3 \quad \& \quad \forall y \in V_2 : \deg(y) = n_1 + n_3$$
$$\forall z \in V_3 : \deg(z) = n_1 + n_2$$

كما أن :

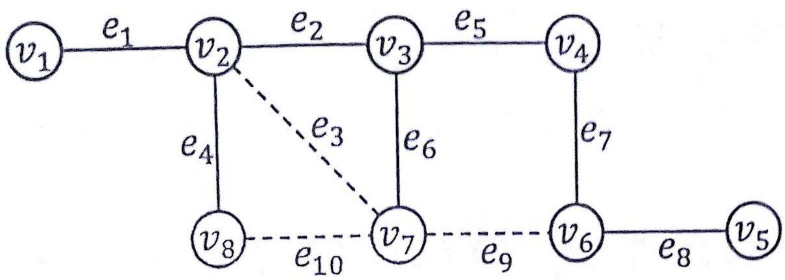
$$2|E| = \sum_{v\in V} \deg(v) = \sum_{v\in V_1} \deg(v) + \sum_{v\in V_2} \deg(v) + \sum_{v\in V_3} \deg(v)$$
$$= n_1(n_2+n_3) + n_2(n_1+n_3) + n_3(n_1+n_2) = 2n_1n_2 + 2n_1n_3 + 2n_2n_3$$
$$\Rightarrow |E| = n_1n_2 + n_1n_3 + n_2n_3$$

السؤال الثاني :

1) الرسم :



2) لإيجاد مصفوفة الدوائر الاساسية لابد من تحديد شجرة مشدودة على البيان ، إن الشكل التالي يمثل شجرة مشدودة على هذا البيان حيث الاضلاع المنقطة هي الأوتار



إن الدوائر الموجودة في البيان هي :

$$C_1 =< e_3, e_4, e_{10} > \ , \ C_2 =< e_2, e_3, e_6 > \ , \ C_3 =< e_5, e_6, e_9, e_7 >$$
$$C_4 =< e_2, e_4, e_{10}, e_6 > \ , \ C_5 =< e_2, e_5, e_7, e_9, e_{10}, e_4 >$$

الاساسية منها هي : C_2 , C_3, C_4 ومنه مصفوفة الدوائر الاساسية هي :

$$C_{f_G} = \begin{array}{c} C_{f_1} \\ C_{f_2} \\ C_{f_3} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) إن مجموعات القطع الأساسية هي :

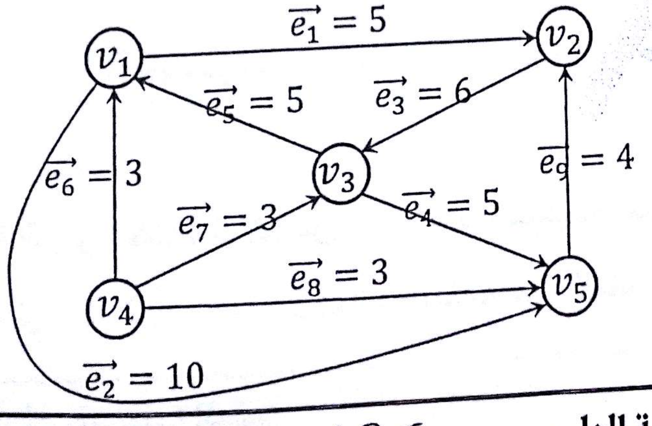
$$K_{f_1} =< e_1 > \ , \ K_{f_2} =< e_2, e_3, e_{10} > \ , \ K_{f_3} =< e_4, e_{10} > \ , \ K_{f_4} =< e_5, e_9 >$$
$$K_{f_5} =< e_6, e_3, e_9, e_{10} > \ , \ K_{f_6} =< e_7, e_9 > \ , \ K_{f_7} =< e_8 >$$

ومصفوفة القطع الأساسية هي :

$$C_{G_f} = \begin{array}{c} C_{G_1} \\ C_{G_2} \\ C_{G_3} \\ C_{G_4} \\ C_{G_5} \\ C_{G_6} \\ C_{G_7} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

السؤال الثالث :

1) الرسم :



2) طريقة كاسكادا : أولا نكتب مصفوفة الأبعاد :

$$B=\begin{pmatrix}0 & 5 & \infty & \infty & 10\\ \infty & 0 & 6 & \infty & \infty\\ 5 & \infty & 0 & \infty & 5\\ 3 & \infty & 3 & 0 & 3\\ \infty & 4 & \infty & \infty & 0\end{pmatrix}\Rightarrow B^2=B\oplus B=$$

$$\begin{pmatrix}0 & 5 & \infty & \infty & 10\\ \infty & 0 & 6 & \infty & \infty\\ 5 & \infty & 0 & \infty & 5\\ 3 & \infty & 3 & 0 & 3\\ \infty & 4 & \infty & \infty & 0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0 & 5 & \infty & \infty & 10\\ \infty & 0 & 6 & \infty & \infty\\ 5 & \infty & 0 & \infty & 5\\ 3 & \infty & 3 & 0 & 3\\ \infty & 4 & \infty & \infty & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 5 & 11 & \infty & 10\\ 11 & 0 & 6 & \infty & 11\\ 5 & 9 & 0 & \infty & 5\\ 3 & 7 & 3 & 0 & 3\\ \infty & 4 & 10 & \infty & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^3=B^2\oplus B=\begin{pmatrix}0 & 5 & 11 & \infty & 10\\ 11 & 0 & 6 & \infty & 11\\ 5 & 9 & 0 & \infty & 5\\ 3 & 7 & 3 & 0 & 3\\ \infty & 4 & 10 & \infty & 0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0 & 5 & \infty & \infty & 10\\ \infty & 0 & 6 & \infty & \infty\\ 5 & \infty & 0 & \infty & 5\\ 3 & \infty & 3 & 0 & 3\\ \infty & 4 & \infty & \infty & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 5 & 11 & \infty & 10\\ 11 & 0 & 6 & \infty & 11\\ 5 & 9 & 0 & \infty & 5\\ 3 & 7 & 3 & 0 & 3\\ 15 & 4 & 10 & \infty & 0\end{pmatrix}\Rightarrow B^4=B^3\oplus B=\begin{pmatrix}0 & 5 & 11 & \infty & \boxed{10}\\ 11 & 0 & 6 & \infty & 11\\ 5 & 9 & 0 & \infty & 5\\ 3 & 7 & 3 & 0 & 3\\ 15 & 4 & 10 & \infty & 0\end{pmatrix}=B^3$$

ومنه أقصر مسار بين العقدة v_1 والعقدة v_5 هو المسار المباشر بين العقدتين و الذي هو : $v_1 \xrightarrow{10} v_5$

3) طريقة ديجكستر :

نفرض أن $P(1)=0$ وأن $T(k)=\infty : k=2,3,4,5$ ولنحسب قيمة $P(2)$:

نعلم أن : $d_{1\,2}=5$ و $d_{1\,5}=10$ ومنه :

$$T(2)=\min\{T(2)\,,P(1)+d_{1\,2}\}=\min\{\infty\,,0+5\}=5$$
$$T(3)=\min\{T(3)\}=\infty$$
$$T(4)=\min\{T(4)\}=\infty$$
$$T(5)=\min\{T(5)\,,P(1)+d_{1\,5}\}=\min\{\infty\,,0+10\}=10$$
$$\Rightarrow P(2)=\min\{T(2)\,,T(3)\,,T(4)\,,T(5)\}$$
$$=\min\{5\,,\infty\,,\infty\,,10\}=5$$

لنحسب $P(3)$: نعلم أن $d_{2\,3} = 6$ ومنه :

$$T(3) = \min\{\infty, 5+6\} = 11 \quad \& \quad T(4) = \min\{\infty\} = \infty$$
$$T(5) = \min\{10\} = 10 \qquad \Rightarrow P(3) = \min\{11, \infty, 10\} = 10$$

لنحسب $P(4)$: نعلم أن $d_{3\,5} = 5$ ومنه :

$$T(4) = \min\{\infty\} = \infty \quad \& \quad T(5) = \min\{10, 10+5\} = 10$$
$$\Rightarrow P(4) = \min\{\infty, 10\} = 10$$

لنحسب $P(5)$: نعلم أن $d_{4\,5} = 3$ ومنه :

$$T(5) = \min\{10, 10+3\} = 10 \qquad \Rightarrow P(5) = \min\{T(5)\} = 10$$

ومنه المسار المطلوب هو : $v_1 \xrightarrow{10} v_5$

السؤال الرابع :

1) لنفرض أن البيان $G = (V; E)$ بيان زوجي $G = (V_1, V_2, ; E)$ ولتكن $v_1, e_1, v_2, \dots, e_{n-1}, v_n$ دائرة من العقدة x إلى العقدة x نفرض أن $x \in V_1$ ،فإن $x \notin V_2$.

بما أن $v_1 \in V_1$ فإن $v_2 \in V_2$ ، $v_3 \in V_1$ ، $v_4 \in V_2$ ... إلخ . إذاً $v_i \in V_1$ لكل عدد فردي i أو $v_j \in V_2$ لكل عدد زوجي j . إذاً n عدد فردي وبالتالي ، فإن $v_1, e_1, \dots, v_n$ دائرة زوجية طولها $n-1$.

الآن نفرض أن $G = (V, E)$ لا يحتوي على دوائر فردية . بما أن البيان G بيان زوجي إذا وفقط إذا كان كل مركبة من مركبات البيان G ثنائية التجزئة فإننا نفرض أن البيان G بيان مترابط . نختار أي عقدة $y \in V$ ونعرف V_1 ، V_2 كما يلي :

$$\left(x \in V : \text{عدد زوجي } d(y,x) \Rightarrow x \in V_1\right)$$
$$\left(x \in V : \text{عدد فردي } d(y,x) \Rightarrow x \in V_2 = V - V_1\right)$$

لتكن العقدتين $x, y \in V_2$ حيث $x \neq y$ ولنثبت أن العقدتين y و x غير متجاورتين ، وذلك بوساطة التناقض . نفرض أن $(x, y) \in E$ بما أن $x \in V_2$ فإنه يوجد ممر فردي $x_1, e_1x_2, \dots, e_{n-1}x_n$ من العقدة Z إلى العقدة x طوله $d(z, x)$. بالمثل ، يوجد ممر فردي $y_1, c_1y_2, \dots, c_{m-1}\,y_m$ من العقدة

Z إلى العقدة y طوله $d(z,y)$ وبما أن $x_1 = y_1 = z$ و $x_n = x \neq y = y_m$ فإننا نستطيع أن نجد عدداً i بحيث :

1) $1 \leq i < n$.

2) يوجد i بحيث $x_i = y_i$.

3) إن العدد i هو أكبر عدد يحقق (1) و(2) .

لنثبت أن $i = j$:

- من أجل $i < j$ فإن $x_1, e_1, x_2, \dots, x_i = y_j, c_j, \dots, y_m$ مسار من العقدة Z إلى العقدة y طوله أصغر من $d(z,y)$ وهذا يناقض تعريف المسافة $d(z,y)$.
- من أجل $j < i$ فإننا نحصل بنفس الطريقة على تناقض .

إذاً $i = j$ وبالتالي فإن :

$$z = y_i = x_i , e_i , \dots , x_n = x, (x,y) , y = y_m , c_{m-1} , \dots , y_i = x_i = z$$

دائرة فردية (مسار فردي + ضلع + مسار فردي = دائرة فردية) ، وهذا يتناقض مع فرضنا أن G لا يحتوي على دوائر فردية .

إذاً فإن العقدتين x, y غير متجاورتين . وبنفس الطريقة نجد أنه إذا كان $x, y \in V_1$ حيث $x \neq y$ فإن العقدتين x, y غير متجاورتين . إذاً G بيان زوجي .

2) ① الاتجاه المباشر :

اذا كان $G(V; E)$ بيان أويلر فإن قدرات أضلاعه زوجية .

الاثبات :

بفرض $G(V; E)$ بيان أويلر فهو يحوي دائرة أويلر (تمر بجميع عقد البيان وأضلاعه) أي أن أي عقدة من البيان (x_i) تتأثر بضلعين من الدائرة (ضلع قبل العقدة وضلع بعدها) عدد من المرات (n_i) حسب تكرار هذه العقدة في الدائرة أي أن جميع العقد تتأثر بعدد زوجي من الأضلاع $(2 \times n_i)$ ، وبما أن البيان هو بيان أويلر فإنه يوجد دائرة تمر بجميع العقد أي تربط بين جميع العقد ومنه البيان مترابط .

② الاتجاه العكسي :

اذا كان البيان $G(V;E)$ مترابط وقدرة عقده زوجية فهو يحوي دائرة أويلر والتي توجد وفق الخوارزمية :

1) نختار عقدة عشوائية x من البيان ومنه $\deg(x) \geq 2$ عندئذٍ يوجد ضلع مثل $e = (x,y)$ وحسب المبرهنة السابقة فإن البيان لا يحوي جسور وبالتالي يمكن أن ننشأ الدائرة $C =< x_1, e_1, \dots, e_{n-1}, x_n = x_1 >$.

2) اذا كانت هذه الدائرة هي دائرة أويلر يتم المطلوب وإذا لم تكن تمر بجميع الأضلاع أو العقد عندئذٍ ننشئ البيان $G' = (V'; E - \{e_1, \dots, e_{n-1}\})$ حيث V' هي V باستثناء العقد المعزولة وحسب مبرهنة نجد أن $V' \cap \{x_1, \dots, x_n\} \neq \phi$ ومنه نختار عقدة مثل y حيث $y \in V' \cap \{x_1, \dots, x_n\}$ وننشأ من هذه العقدة دائرة C' بنفس الطريقة السابقة ونوجد الدائرة $\overline{C} = C \cup C'$ ،

3) إذا كانت $\overline{C}$ دائرة أويلر يتم المطلوب و إلا نكرر الخطوة الثانية .

وبما أن هذه الخوارزمية توجد لنا دائرة أويلر في هذا البيان فإن البيان هو بيان أويلر .

انتهى حل دورة 2013-2014 التكميلية