التحليل العددي 1

ملخص شامل للمقرر

التحليل العددي

التحليل العددي: هو بناء خوارزمية عددية لمسائل رياضية معرفة ومستمرة حصراً وليست أي مسألة.

يوجد للمسألة حل تحليلي

حل فعلي (T)

حل تقريبي (Q)

- قانون الخطأ المطلق (فعلي): |الجواب| = $E_{exact} = |T-Q|$

قانون الخطأ النسبي: $R_{exact} = \frac{E_{exact}}{T}$

- E_{max}: الخطأ الأعظمي ليس هناك أي قانون محدد للخطأ الأعظمي فكل خوارزمية تمتلك خطأ أعظمي معين (خاص) E_{max}.

- أنواع الأخطاء:

مثال: اقتطع الرقم $T = 2.34611$ بالنسبة لمنزلتين عشريتين.

طريقة الاقتطاع: نأخذ ثلاث منازل بعد الفاصلة إذا كان الرقم الثالث ≥ 5 نضيف 1 للمنزلة الثانية.

$$Q = 2,35$$

عندها يكون الخطأ:

$$E_{exact} = |T-Q| = 0.00389$$

إذا كان المقدار E_{exact} كبير نقوم بحساب (نقوم بحساب R_{exact} إذا طُلب ذلك)

$$R_{exact} = \frac{E_{exact}}{T} = \frac{0,0038}{2,34611}$$

- قانون الخطأ الأعظمي المرتكب في تدوير الأرقام العشرية: $E_{max} = 0.5 \times 10^{-n}$

حيث n هي عدد المنازل العشرية التي تم تدوير الأرقام لها

مثال:

$$\underbrace{2,35}_{n=2 \text{ بالتالي}} Y'' + 6Y + 11 = 0$$

عندها $E_{max} = 0.5 \times 10^{-2} = 0.005$

$$R_{max} = \left|\frac{E_{max}}{Q}\right| = \frac{0,005}{2.35}$$

$$R_{max} = 0.00211217$$

$E_{exact} \leq E_{max}$

$0.00389 \leq 0.005$

أنواع الأرقام

عشرية (d.c)

معنوية (s.f)

مثال: $\pi = 3,141592$

رقمين عشريين $2(d.s) \rightarrow 3,14$

رقمين معنويين $2(s.f) \rightarrow 3,1$

الأخطاء الناتجة عن اقتطاع السلاسل المنتهية :

يأتي السؤال بالشكلين :

1- أوجد حدودية تايلور والخطأ الأعظمي . 2- احسب خطأ الاقتطاع المرتكب وأوجد الخطأ الأعظمي .

منشور تايلور يعطى بالشكل :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

منشور كل من $\cos x$ ، $\sin x$ ، e^x

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

ملاحظة : إذا كان مضمون ال Sin $(0.5x)$ عندها يكون المنشور

$$\sin(0.5x) = 0.5x - \frac{(0.5x)^3}{3!} + \dots$$

- قانون الخطأ الأعظمي :

$$E_{max} = \frac{|P_{(n+1)}|\,|f^{(n+1)}_{(Q)}|}{(n+1)!}$$

$P_{(n+1)}$: هي عبارة عن حدودية يتم إقتطاعها من السلسلة دون عاملي أو مشتق .

$f^{(n+1)}_{(Q)}$: هو عبارة عن اشتقاق الدالة $(n+1)$ مرة ومن ثم أخذها بأعلى قيمة .

T : حل فعلي (ينتج عن تعويض القيمة المعطاة في الدالة مباشرة) .

Q : حل تقريبي (نقوم باقتطاع من السلسلة فنقتطع حتى الوصول إلى درجة الحدودية المطلوبة n ثم نقوم بتعويض القيمة المعطاة فينتج Q) .

مثال : أوجد حدودية تايلور والخطأ الأعظمي باستخدام مبرهنة تايلور واحسب قيمة $f(x) = e^x$

$n = 2$ ، المجال $[0,3]$ ، $x = 1,2$

الحل :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

بما أن $n = 3$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

وتكون قيمة التابع

$$e^{1.2} = 1 + 1.2 + \frac{(1.2)^2}{2!}$$

الخطأ الأعظمي :

$$E_{max} = \frac{|P_{(n+1)}|}{(n+1)!}\,|f^{(n+1)}_{(Q)}|$$

Q هي القيمة التي توافق أعلى قيمة للمشتق .

$P_3 = (1.2)^3$ ، $(n+1)! = 3!$

$$|f^{(n+1)}_{(Q)}| = |f^3_{(Q)}|$$

$$f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x,\ f''(x) = e^x,\ f'''(x) = e^x$$

بما أن e^x دالة متزايدة نأخذها بأعلى قيمة بالمجال $[0,3]$

$x = 3 \qquad f'''(0) = e^3$

$$E_{max} = \frac{(1,2)^3}{3!} e^3 \quad , \quad T = e^{1,2}$$

نعوض في الدالة :

$$Q = 1 + 1,2 + \frac{(1,2)^2}{2}$$

$$E_{exact} = |T - Q| = |e^{1,2} - 2,92| = 0.4011692 3$$

$E_{max} \geq E_{exact}$ فإن الحل يكون صحيح

ملاحظة: نقوم بإجراء المقارنة السابقة إذا طُلب هل الاقتطاع صحيح (هل الحل صحيح ؟) ؟

.. الأخطاء الناتجة عن الدوال واستقرارها ..

كيف يمكننا معرفة أن الدالة مريضة ؟! ..

ندرس الـ $R(f)$

$$R(f) = \left|\frac{E(f)}{f}\right|$$

$$E(f) = |f(x_2) - f(x_1)| \Rightarrow E(f) = |y_2 - y_1| = \Delta f$$

نضرب ونقسم على x

$$f' = \frac{\Delta f}{\Delta x} \Rightarrow \Delta f = f' \cdot \Delta x \Rightarrow R(f) = \frac{f'}{f} \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow R_{exact}(f) = \frac{f'}{f} \Delta x \frac{x}{x} = \frac{f'}{f} x \frac{\Delta x}{x}$$

$$R(f) = \left|\frac{f'}{f} x\right| |R(x)|$$

صغير جداً

حيث $\frac{\Delta x}{x}$ تغير نسبي لـ x أي هي $R(f)$ ومنه :

فيكون العدد الشرطي $\left|\frac{f'}{f} x\right|$.

كيف يأتي السؤال في الامتحان ..!؟

أوجد العدد الشرطي ؟

هل الدالة مريضة ؟

ملاحظة: تكون الدالة جيدة إذا كانت قيمة العدد الشرطي بين $[0,1]$ وإلا كانت الدالة مريضة.

مثال (1): أوجد العدد الشرطي للدالة $f(x) = \sqrt{x}$

العدد الشرطي $\left|\frac{f'}{f} x\right|$

$$= \left|\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} x\right| = \frac{1}{2} < 1$$

ومنه f جيدة

مثال (2): أوجد العدد الشرطي للدالة $f(x) = e^x$ من أجل $x = 10$

$$\left|\frac{f'}{f} x\right| = \left|\frac{e^x}{e^x} x\right| = x = 10 < 1$$

ومنه الدالة مريضة

" الطرق المجالية "

معايير التوقف :

1)- معيار تقارب متتالية القيم : $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon(x)$

2)- معيار تقارب الدالة المطلوب إيجاد جذرها : $|f(x_n)| < \varepsilon(f)$

3)- معيار تقارب خطأ الطريقة المتبعة : $E_{max} < \varepsilon$

4)- عدد التكرارات المطلوبة n .

أ- طريقة تنصيف المجال :

نفرض لدينا $f(x)$ دالة معرفة على المجال $[a,b]$ ومستمرة لإيجاد

خوارزمية تنصيف المجال :

$f(x)$ معرفة ومستمرة ، لإيجاد الجذر يجب أن تحقق الشرط $\Leftarrow$ $f(a).f(b) < 0$ عندها نقوم بإيجاد : $c = \frac{a+b}{2}$

أما إذا كانت $|f(c)| < \varepsilon$ حيث : c : جذر تقريبي . ε = حسب التمرين .

$f(c) = 0$ هو المطلوب .

كيف يأتي السؤال بالامتحان وطريقة كتابة الجدول ؟!

مثال : $f(x) = x^2 - 3$ على المجال $[1,2]$ أوجد الجذر التقريبي لطريقة تنصيف المجال بدقة .

$\varepsilon(f) = 0,01$

الحل : لدينا $a = 1$ ، $b = 2$ نوجد c من القانون $c = \frac{a+b}{2}$

نلاحظ في الجدول أنه إذا كان $f(a).f(c) < 0$ ، $a = c$ ، $f(b).f(c) < 0$ ، $b = c$

i	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$c = \frac{a+b}{2}$	$f(c)$	$\frac{b-a}{2}$
1	1	2	-2	1	1.5	-0,75	0,5
2	1,5	2	-0,75	1	1,75	-0,062	0,25
3	1,5	1,75	-0,75	0,0625	1,625	-0,359	0,152
4	1,625	1,75	-0,359	0,0625	1,6875	-0,1523	0,0625
5	1,6875	1,75	-0,1523	0,0625	1,7188	-0,0457	0,0313
6	1,7188	1,75	-0,0457	0,0625	1,7344	-0,0081	0,0156
7	1,7188	1,7344	-0,0457	0,0081	1,7266	-0,0189	0,0078

نلاحظ أن $c = 1,7344$ هو الجذر المطلوب

لأن شرط التوقف $|f(1,7344)| < \varepsilon$

ملاحظة : في طريقة تنصيف المجال يوجد قانون يمكننا من خلاله معرفة عدد التكرارات الأعظمي اللازم للحصول على دقة ε

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\log(2)} \quad , \quad n \geq \frac{\ln \frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln(2)}$$

تعتمد هذه الطريقة على اختيار نقطة بديلة عن المنتصف من العلاقة التالية :

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1)$$ (طريقة الوضع الخاطئ)

خوارزمية الحل :

- نفرض $f_0 \cdot f_1 < 0 \iff f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$
- إدخال (تحديد القيم الابتدائية) : $\varepsilon > 0$ ، من نص السؤال = ε , $m > 0$ حيث m عدد التكرارات .
- $i = 2$ تمثل دليل التكرار المحسوب .
- طالما أن $i \leq m$ نحسب x_2 من القانون $x_2 = x_1 - \left[\frac{x_1 - x_0}{f_1 - f_0}\right] \cdot f_1$
- إذا كان $|f_2| \leq \varepsilon$ عندئذٍ x_2 هي الجذر التقريبي المطلوب ونتوقف .
- إذا لم يتحقق الشرط ولم نطبق نكرر $i = i + 1$ أما إذا كان $f_2 \cdot f_1 < 0$ عندئذٍ نستبدل $x_0 = x_2$ أي $f_0 = f_2$
- وإلا $x_1 = x_2$ أي $f_1 = f_2$
- إخراج : تفشل الطريقة في إيجاد الجذر بالدقة ε عند هذه النقطة حسب عدد التكرارات m
- نتوقف .

تقدير الخطأ لطريقة الوضع الخاطئ :

من أجل دقة معينة ε نفترض أن :

$$\left|\frac{\lambda}{\lambda - 1}\right| |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

حيث أن :

$$\lambda = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}$$

مثال : أوجد جذر الدالة لطريقة الوضع الخاطئ $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 1$
على المجال $[1,2]$ وبدقة $\varepsilon = 0.005$

i	x_0	x_1	f_0	f_1	x_2	f_2	الخطأ
1	1	2	-1	9	1,1	-0,549	....
2	1,1	2	-0,549	9	1,1517436	-0,2744409	....
3	1,151746	2	-0,	9	1,1768409	-0,1307425	0,023638
4	1,1768409	2	-0,1307425	9	1,1886277	-0,060875	0,0104375
5	1,1886277	2	-0,0608757	9	1,1940789	-0,02804	0,0046907

حيث الجذر التقريبي المطلوب بتكرار الخامس هو $x_2 = 1.19407890$

لأن $0046907 < 0.005$

ملاحظة : علينا أن نبدأ بحساب قيمة λ في (الطريقة الوضع الخاطئ) من خلال ما يلي :

1)- نأخذ قيمة x_0 المقابلة لـ $i = 3$ (X_3)
2)- نأخذ قيمة x_0 المقابلة لـ $i = 2$ (X_2)
3)- نأخذ قيمة x_0 المقابلة لـ $i = 1$ (X_1)

ويكون :

$$\lambda = \frac{X_3 - X_2}{X_2 - X_1}$$

2- طريقة نيوتن :

تعتمد هذه الطريقة على اختيار نقطة تقريبية x_0 يتم رسم المماس للدالة في النقطة ثم نأخذ نقطة التقاطع مع ox وهكذا : يتم الحصول على جذر تقريبي تعطى النقطة الجديدة .

$$X_{(n+1)} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$$

ثم نكرر العملية للحصول على الجذر التقريبي .

كيف يأتي السؤال بالامتحان (على طريقة نيوتن) ؟!

يعطى قيمة للتخمين وتعطى الدالة وقيمة ε .

نقوم بما يلي :

1)- نحدد شرط التوقف من القانون شرط التوقف $|X_n - X_{n+1}| \leq \varepsilon$

2)- ثم نقوم بإيجاد النقاط $X_1, X_2, \dots$ من القانون

3)- نكرر حتى الوصول إلى شرط التوقف .

4)- عندها تكون x هي الجذر المطلوب .

مثال: أوجد باستخدام طريقة نيوتن : $f(x) = x^6 - x - 1$ ، $\varepsilon = (10)^{-6}$ ، $x_0 = 1.5$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$(x_n - x_{n-1})$
0	1.5	8.890625	44.5625	
1	1.3004909	2.5372645	21.319674	0.1995091
2	1.1814804	0.5384583	12.812868	0.1190105
3	1.1394556	0.0492352	10.52492	0.0420248
4	1.347776	0.00055	10.290288	0.004678
5	1.1344242	$0.6 * 10^{-5}$	10.287632	$0.534 * 10^{-4}$
6	1.1347241	$-0.3 * 10^{-6}$	10.287627	$0.1 * 10^{-6}$

حيث $f'(x) = 6x^5 - 1$ نعوض بالقانون : $x_{(n+1)} = x_n - \left[\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right]$

$$x_1 = 1.5 - \left[\frac{8.890625}{44.5625}\right] = 1.300490884$$

التكرار (6) هو الجذر التقريبي المطلوب .

وبنفس الطريقة أوجدنا الجدول كله .

3- طريقة القاطع : (مثال : المحاضرة (6) صفحة (4))

هذه الطريقة غير الطرق السابقة حيث أنه لا يوجد مجال بل تعتمد على اختيار تخمين X_1, X_0 تحقق الشرط $f(X_0) . f(X_1) < 0$ ويكون البدء منهما ومن ثم إيجاد نقطة الجذر المطلوب .

$$X_n = X_{n-1} - \left[\frac{X_{n-1} - X_{n-2}}{f_{n-1} - f_{n-2}}\right] f_{n-1}$$

من X_1 و X_0 تكون X_2

$$X_2 = X_1 \left[\frac{X_1 - X_0}{f_{(1)} - f_{(0)}}\right] f_{(1)}$$

ملاحظة :

"طريقة النقطة الثابتة"

تختلف عن طريقة القاطع فهي تبدأ من صيغة $f(x)$ للحصول على صيغة جديدة (دالة تكرار) تمثل بالشكل $x = g(x)$ ⟸ نستخدم هذه الصيغة للحصول على دالة التكرار

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

تعريف: نقول عن المتتالية $\{x_n\}_{n\geq 0}$ متقاربة من α بمرتبة تقارب $p \geq 1$ إذا تحقق الشرط:

$$|\alpha - x_n| \leq c\,|\alpha - x_n|^p$$

p: مرتبة التقارب.
c: ثابت التقارب.

ولتعيين c, p في الطرق الحالية نتبع الجدول التالي:

الطريقة	مرتبة التقارب (p)	ثابت التقارب (c)	ملاحظات تخص الطريقة
تنصيف المجال	1	—	$E_n = \frac{b-a}{2^n}$
الوضع الخاطئ	تسمى مرتبة التقارب فوق الخطية $1 < p$		
القاطع	$p = 1.62$	$\left[\frac{f''(x)}{2f'(x)}\right]^{p-1}$ حيث (x) هي قيمة الجذر التقريبي	$E_{n+1} = \frac{1}{2}(E_n)(E_{n-1})\left(\frac{f''}{f'}\right)$
نيوتن	2	$\frac{f''}{2f'}$	
النقطة الثابتة	1	$\max\lvert g'(x)\rvert$ حيث (x) هي قيمة الجذر التقريبي	$E_n = \left(\frac{\lambda^n}{1-\lambda}\right)E_0$ حيث $E_0 = \lvert x_1 - x_0\rvert$ λ التي في المقام هي $\max\lvert g'(x)\rvert$

كيف يأتي السؤال في الامتحان ؟!..

تأتي المثال الشامل الآتي..

مثال: لتكن لدينا الدالة $g(x) = \sqrt{3x+4}$ والمطلوب:

1)- أثبت أن $x = 4$ نقطة ثابتة للدالة السابقة.
2)- هل تمثل $g(x)$ دالة تكرار على المجال $[2,5]$
3)- ماهي مرتبة التقارب.
4)- ماهي ثابت التقارب.
5)- أحسب x_1, x_2 من أجل $x_0 = 3$
6)- احسب الخطأ المرتكب في حساب x_{24}

"ملاحظات حول السؤال الامتحاني"

تكون x نقطة ثابتة إذا تحقق الشرط $\boxed{x = g(x)}$

تكون $g(x)$ دالة تكرار إذا كان $\max|g'(x)| < 1$ أي أعلى قيمة للمشتق الأول

حل المثال الشامل :

1)- إذا تحقق أن $x=g(x)$ من أجل $x=4$ فتكون $x=4$ نقطة ثابتة بالنسبة للدالة

نعوض : $4=\sqrt{3(4)+4}$

$4=\sqrt{16} \Leftarrow x=4$ نقطة ثابتة للدالة $g(x)$

إذاً النقطة $(4,4)$ تنتمي لمنحنى الدالة .

2)- إنّ المشتق $g'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$ سندرس إشارته والجذر دائماً أكبر أو يساوي الصفر

$\Leftarrow$ المقام متزايد وكلما كبر المقام تناقصت الدالة .

$g'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$ الدالة متناقصة على المجال $[2,5]$ بما أن الدالة متناقصة نعوض بالقيمة 2 وأمّا

إذا كانت متزايدة نعوض بالقيمة 5 وهنا الدالة متناقصة $\quad g'(2)=\frac{3}{2\sqrt{10}}<1$

إذاً الدالة g هي دالة تكرار

3)- مرتبة التقارب $p=1$

4)- ثابت التقارب $c=g'_{max} \Leftarrow c=\frac{3}{2\sqrt{10}}$

5)- $x_0=3$

$$x_n=\sqrt{3(x_n-1)+4}$$

$$x_1=g(x_0)$$

$$=\sqrt{3(3)+4}=\sqrt{13}=3,60555$$

$$x_2=g(x_1)$$

$$=\sqrt{3(3,60555)+4}$$

$$=3,8492$$

6)- لحساب الخطأ المرتكب في طريقة النقطة الثابتة نطبق

$$E_n=\left(\frac{\lambda^n}{1-\lambda}\right)E_0$$

حيث λ التي في المقام هي $\max|g'(x_2)|$

$$E_0=|x_1-x_0|=3.60555-3=0,60555$$

$$|g'(x_2)|=\left|\sqrt{3(3,8492)+4}\right|$$

$$E_{24}=\frac{\left(\frac{3}{2\sqrt{10}}\right)^{24}}{1-\left(\frac{3}{2\sqrt{10}}\right)}=0.60555$$

التمرين الثالث:

لتكن الدالة $f(x)=e^{x}-2$ ومن أجل $x_0=0.5$ والمطلوب:

1)- أوجد x_1, x_2, x_3 بطريقة نيوتن؟

أي الجذر التقريبي المطلوب هو x_3 وقد علمنا هذا من نص السؤال.

2)- من هو الجذر التقريبي الذي حصلنا عليه؟

هو x_3

3)- ما هي مرتبة التقارب؟

$P=2$

4)- ما هو ثابت التقارب؟

حيث $C=\frac{f''}{2f'}$ $\qquad f'=f''=e^{x}$

5)- ما هو الخطأ المرتكب في الجذر x_3؟

الحل:

1)- نطبق قانون نيوتن:

$$x_{(n+1)}=x_n-\left[\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right]$$

لكن علينا أولاً إيجاد

$$f'(x)=e^{x}, \quad f(x)=e^{x}-2$$

$$x_1=x_0-\left[\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right]=0.5-\left[\frac{e^{0.5}-2}{e^{0.5}}\right]$$

$$=0.713063194$$

نعيد التعويض في القانون من أجل x_2, x_3 فنحصل على:

2)-

$$x_1=0.711344157 3$$

$$x_3=0.6933117458$$

3)- مرتبة التقارب $P=2$ (من الجدول)

4)- ثابت التقارب $C=\frac{f''}{2f'}$ (من الجدول)

$$C=\frac{e^{x}}{2e^{x}}=\frac{e^{0.5}}{2e^{0.5}}=0.5$$

5)-

$$|x_n-x_{n-1}|=|0.6933117458-0.01803241155|$$

$$=0.0180324115$$

الاستيفاء بكثيرات الحدود:

ليكن لدينا النقاط $(x_0,y_0)(x_1,y_1)(x_2,y_2)\dots(x_n,y_n)$ عددها $(n+1)$ نقطة

عملية إيجاد تابع f يمر من النقاط ويحقق $f(x)=y$

طريقة استيفاء (لاغرانج):

ليكن لدينا مجموعة من النقاط $(x_0,y_0)(x_1,y_1)\dots(x_n,y_n)$ عددها $(n+1)$ نقطة

لإيجاد الحدودية $P_n(x)$ التي درجتها (n) من الشكل:

$$P_n(x)=L_0(x)y_0+L_1(x)y_1+\dots+L_n(x)y_n$$

حيث معاملات الحدودية $L_n(x)$ ، $n=0,1,2,\dots$

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)}$$

$$\vdots$$

$$L_n(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}$$

ثم نقوم بالتعويض في $P_n(x)$ تظهر حدودية لاغرانج

حساب الخطأ في طريقة لاغرانج:

الخطأ الفعلي: E_{exact} وذلك عن طريق القانون: $E_{exact}=|T-Q|$

T: الحل الفعلي وهو تعويض الدالة مباشرة.

Q: حل تقريبي وهو تعويض الحدودية.

الخطأ الأعظمي E_{max} وذلك عن طريق القانون: $E_{max}=\left|\frac{P_{(n+1)}}{(n+1)!}f^{n+1}_{(Q)}\right|$

$f^{n+1}_{(Q)}$: هي اشتقاق الدالة f $(n+1)$ مرة وأخذ المشتق بأعلى قيمة.

P_{n+1}

إذا كانت المسافة بين النقاط غير متساوية: $P_{n+1}=(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$ وتكون قيمة x المعطاة

إذا كانت المسافة بين النقاط متساوية: $\max|P_{n+1}|=\frac{h^{n+1}}{4}n!$

مثال: ليكن لدينا جدول القيم التالي:

x_k	0	0.6
$\ln(x+1)$	0	0.47000

جد حدودية لاغرانج الخطية؟ أوجد الخطأ الأعظمي (النظري) والخطأ الفعلي عند $x=0.45$.

الحدودية: $P_1(x)=\frac{x-0.6}{0-0.6}(0)+\frac{x-0}{0.6-0}(0.47000)=0.78334x$

الخطأ الأعظمي (النظري): $E_{max}=\left|\frac{P_{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}_{(Q)}\right|$

نلاحظ أنه يوجد لدينا نقطتان فقط أي أن البعد بينهما واحد (ثابت)

لذلك نطبق: $P_{n+1}=\frac{h^{n+1}}{4}n!$

h: هي الفرق بين النقطتين المتتاليتين $h=0.6$

$$\max P_{n+1}=\frac{(0,6)^2}{4}(1)!$$

$f^{(n+1)}_{(Q)}=f^{1}_{(Q)}$, $f'(x)=\frac{1}{\dots}\Rightarrow f''(x)=\frac{1}{(\dots)^2}$ $h^2=\frac{(0.6)^2}{\dots}$

يتبع

$|f''(x)|$ دالة متناقصة تبلغ قيمتها العظمى عندما $x=0$ الواحد $E(0.45)\leq 0.045$

$E_{max}=|T-Q|$ حيث $T=\ln(1.45)$ و $Q=P_1(0.45)$ $E_{max}=|0.37156-0.352509|=0.019057$

طريقة نيوتن :

ليكن لدينا $(n+1)$ نقطة عندئذٍ تكون حدودية نيوتن من الشكل

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\dots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

لإيجاد الثوابت $a_0, a_1, \dots, a_n$ نعوض $x=x_0$ في الحدودية فينتج $a_0=y_0$

ولكن للأمن حفظ القوانين نستعين بجدول لتسهيل إيجاد الثوابت .

جدول القوانين

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
0	x_0	a_0 y_0			
			a_1 $f[x_0,x_1]=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$		
1	x_1	y_1		a_2 $f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
			$f[x_1,x_2]=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$		a_3 $f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
2	x_2	y_2		$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
			$f[x_2,x_3]=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$		
3	x_3	y_3			

الخطأ الأعظمي في نيوتن :

$$E_{max}=\frac{P_{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(Q)$$

$$E_{max}=(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

لكن غالباً يجب علينا استخدام القانون الأول .

مثال : استخدم صيغة نيوتن في إيجاد حدودية الاستيفاء من الدرجة الرابعة التي تستوي النقاط الآتية :

i	0	1	2	3	4
x_i	0	5	7	8	10
$f(x_i)$	0	2	-1	-2	20

$$P_4(x)=a_0+a_1(x)+a_2(x)(x-5)+a_3(x)(x-5)(x-7)+a_4(x)(x-5)(x-7)(x-8)$$

وحتى يتم هذا يتوجب علينا تعيين a_0,a_1,a_2,a_3,a_4 نقوم ببناء جدول الفروق القسمية كما يلي :

i	x_i	$f(x_i)$				
0	0	0				
			$F[x_0,x_1]=\frac{F[x_1]-F[x_0]}{x_1-x_0}$ $=\frac{2-0}{5-0}=0,4$			
1	5	2		$F[x_0,x_1,x_2]=\frac{-1,5-0,4}{7-0}$ $=-0,271$		
			$F[x_2,x_1]=\frac{F[x_2]-F[x_1]}{x_2-x_1}$ $=\frac{-1-2}{7-5}=-1,5$		$F[x_0,x_1,x_2,x_3]=$ $\frac{0,167+0,271}{8-0}=0,0548$	
2	7	-1		$F[x_1,x_2,x_3]=\frac{-1+1,5}{8-5}$ $=-0,167$		$F[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]=$ $\frac{0,767-0,0548}{10-0}$ $=0,0712$
			$F[x_3,x_2]=\frac{F[x_3]-F[x_2]}{x_3-x_2}$ $=\frac{-2+1}{8-7}=-1$		$F[x_1,x_2,x_3,x_4]=$ $\frac{4-0,167}{10-5}=0,767$	
3	8	-2		$F[x_2,x_3,x_4]=\frac{11+1}{10-7}=4$		
			$F[x_4,x_3]=\frac{F[x_4]-F[x_3]}{x_4-x_3}$ $=\frac{20+2}{10-8}=11$			
4	10	20				

$$P_4(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)$$
$$+a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$
$$+a_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

نعوض: $a_0=0, a_1=0,4, a_2=-0,271, a_3=0.0548, a_4=0.0712$

الخطأ الأعظمي لطريقة نيوتن

$$E_{max}=\left|\frac{P_{n+1}\,f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}\right|$$

- إذا كانت المسافة بين النقاط متساوية (h)

تكون P_{n+1}

$$\max|P_{n+1}|=\left|\frac{h^{n+1}}{4}(n!)\right|$$

- إذا كانت المسافة غير متساوية

$$P_{n+1}=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

حيث (x) تكون معطاة

طريقة هرميت :

لتكن لدينا $(x_0,y_0)(x_1,y_1)(x_2,y_2)\cdots(x_n,y_n)$ عددها $(n+1)$ نقطة ولدينا المشتق $(n+1)$

عندئذ $(n+1)+(n+1)=2n+2$

بالتالي تكون درجة الحدودية في هرميت $(2n+1)$

يكون شكل حدودية هرميت :

$$H_{2n+1}=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^2(x-x_1)$$
$$a_4(x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-x_2)+\cdots+a_{2n+1}(x-x_0)^2\cdots(x-x_{n-}$$

نوجد الثوابت $a_0,a_1,\dots,a_{2n+1}$ من خلال الجدول الآتي :

جدول القواسم :

x_i	y_i	الفروق المقسومة الأولى	الفروق المقسومة الثانية	
x_0	y_0			
		$\frac{y_0-y_0}{x_0-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{y-y_0}{x-x_0}=y'_0$		
x_0	y_0		$\frac{\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}-y'_0}{x_1-x_0}$	
		$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$		$\dfrac{\frac{y'_1-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}{x_1-x_0}}{\frac{y'_1-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}{x_1-x_0}}$
x_1	y_1		$\frac{y'_1-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}{x_1-x_0}$	
		$\frac{y_1-y_1}{x_1-x_1}=y'_1$		
x_1	y_1			

مثال 1: أوجد تقريباً لـ $F(0{,}34)$ باستخدام حدودية هرميت الموافقة للبيانات الواردة في الجدول الآتي :

K	x_K	$f(x_K)$	$f'(x_K)$
0	0,3	0,29552	0,95534
1	0,32	0,31457	0,94924
2	0,35	0,34290	0,93937

$$H_{2n+1}=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^2(x-x_1)$$
$$+a_4(x-x_0)^2(x-x_1)^2+a_5(x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-x_2)$$

طريقة (سبلين) :

تختلف طريقة سبلين عن الطرق (لاغرانج - نيوتن - هرميت) حيث نعطي التابع بالشكل :

$$S \begin{cases} S_0(x) & [x_0, x_1] \\ S_1(x) & [x_1, x_2] \end{cases}$$

ويكون السؤال أوجد الثوابت a, b, c, d ويكون سبلين ← طبيعي ، مقيد

فيكون الحل بتطبيق الشروط التالية :

1)- شرط الاستيفاء الأصلي $S(x_i) = y_i$

2)- العقد • شرط الاتصال $S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1})$

• شرط الاستمرار $S'_j(x_{j+1}) = S'_{j+1}(x_{j+1})$

• شرط التقعر $S''_j(x_{j+1}) = S''_{j+1}(x_{j+1})$

3)- الشروط الحدية :

مقيد :

$S'(x_0) = f'(x_0)$

$S'(x_n) = f'(x_n)$

طبيعي :

$S''(x_0) = 0$

$S''(x_n) = 0$

ملاحظة : نقوم بكتابة شرط الاستيفاء الأصلي ولم نستفد منه

مثال (1) : ليكن لدينا S تابع سبلين طبيعي الذي يستوفي التابع f عند النقاط : $x_0 = 1$ نقطة بداية ، $x_1 = 2$ العقدة ، $x_2 = 3$ نقطة نهاية

$$S = \begin{cases} S_0(x) = 2(x-1) - (x-1)^3 & ; 1 \leq x \leq 2 \\ S_1(x) = a + b(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3 & ; 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

أوجد الثوابت a, b, c, d .

نطبق الشروط :

1)- $S(x_i) = y_i$ من أجل $i = 0, 1, \dots, n$

(لا يمكن تطبيق هذا الشرط لأن قيم الدالة غير معلومة عند النقاط x_i)

تتمة المثال (1) :

2)- بداية سنوجد المشتقات لتنظيم الحل :

$S_0(x) = 2(x-1) - (x-1)^3$

$S'_0(x) = 2 - 3(x-1)^2$

$S''_0(x) = -6(x-1)$

$S_1(x) = a + b(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3$

$S'_1(x) = b + 2c(x-2) - 3d(x-2)^2$

$S''_1(x) = 2c + 6d(x-2)$

أ)- $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$

أي $S_0(x_1) = S_1(x_1)$; $x_1 = 2$

$2(x-1) - (x-1)^3 = a + b(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3$

$x_1 = 2 \Rightarrow$

$2 - 3(2-1)^2 = b + 2c(2-2) + 3d(2-2)^3$

$\Rightarrow \boxed{a = 1}$

ب)- $S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$

$S'_0(x_1) = S'_1(x_1) \Rightarrow$

$2 - 3(x-1)^2 = b + 2c(x-2) + 3d(x-2)^2$

$x_1 = 2 \Rightarrow$

$2 - 3(2-1)^2 = b + 2c(2-2) + 3d(2-2)^3$

$\Rightarrow \boxed{b = -1}$

ت)- $S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$

$S''_0(x_1) = S''_1(x_1)$

$-6(x-1) = 2c + 6d(x-2)$

$x_1 = 2 \Rightarrow -6(2-1) = 2c + 6d(2-2)$

$\Rightarrow \boxed{c = -3}$

3)- نلاحظ كما ذكر بالسؤال أن سبلين طبيعي فنطبق

$S''_0(x_0) = 0$

x_i	$f(x_i)$					
0.3	0.29552					
		0.95534				
0.3	0.29552		$\frac{0.95250-0.95534}{0.32-0.3}$ $=-0.142$			
		$\frac{0.31457-0.29552}{0.32-0.3}$ $=0.95250$		$\frac{-0.163+0.142}{0.32-0.3}$ $=-1,505$		
0.3	0.31457		$\frac{0.94924-0.95250}{0.32-0.3}$ $=-0.163$		$\frac{-0.013332+1505}{0.35-0.3}$ $=20,7336$	
		0.94924		$\frac{-0.1636666+0.163}{0.35-0.3}$ $=-0.013332$		$\frac{-0.44492+20,733}{0.35-0.3}$ $=-431.55704$
0.3	0.31457		$\frac{0.94433-0.94924}{0.35-0.32}$ $=-0.1636666$		$\frac{-0.055566+0.013332}{0.35-0.3}$ $=-0.44492$	
		$\frac{0.3429-031457}{0.35-0.32}$ $=0.94433$		$\frac{-0.16533+0.1636666}{0.35-0.32}$ $=-0.0555566$		
0.3	0.34290		$\frac{0.93937-0.94433}{0.35-0.32}$ $=-0.165533$			
		0.93937				
0.3	0.34290					

وعليه فإن :

$$H_5 = a_0 + (x-x_0)a_1 + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^2(x-x_1) + a_4(x-x_0)^2(x-x_1)^2 + a_5(x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-x_2)$$

$$H_5 = 0.29552 + (x-0.3)(0.95534) + (-0.142)(x-0.3)^2 + (-1,505)(x-0.3)^2(0.32) + (20,7336)(x-0.3)^2(x-0.32)^2 + (-431.55704)(x-0.3)^2(x-0.32)^2(x-0.35) = 0,3334888$$

$$f(0.34) \approx H_5(0.34) = 0.3334888$$

الخطأ الأعظمي المرتكب في طريقة ~~...~~ : هرميت :

$$E_{max} = \frac{P_{n+1}}{(n+1)} \left| f^{(n+1)}_{(\theta)} \right|$$

أ- إذا كانت المسافات متساوية

$$\max P = \left[\frac{h^{n+1}}{4} (n!) \right]^2$$

h: مقدار الخطوة بين النقاط $(x_n - x_{n-1})$

ب- إذا كانت النقاط مختلفة البعد نفرض

$$H_{2n+2} = (x-x_0)^2 (x-x_1)^2 \cdots (x-x_{2n+1})^2$$

ة المثال (1):

يث أن $x_0 = 1$ $\qquad S''_0(x_n) = 0$

$-6(x-1) = 0$

$-6(1-1) = 0 \Rightarrow 0 = 0$

$S''(x_n) = 0$ أي $S''(x_0) = 0$

$2c + 6d(x-2) = 0$

حيث $x = 3 \ , \ c = -3$

$2(-3) + 6d(3-2) = 0$

$-6 + 6d = 0$

$\Rightarrow \boxed{d = 1}$

ثال (2): ليكن لدينا الشريحة التكعيبية المقيدة

سبلين الذي يستوفي التابع f عند النقاط

$x_0 = 1 \ , \ x_1 = 2 \ , \ x_2 = 3$

$$S(x) \begin{cases} S_0(x) = 22 - 9(x-1) - (x-1)^3 & : 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ S_1(x) = a + b(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3 & : 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

أوجد الثوابت a, b, c, d بفرض $f'(1) = f'(3)$

نطبق الشروط التي يجب أن تحققها حدودية الاستيفاء :

1)- شرط الاستيفاء الأصلي :

(لا يمكن تطبيق هذا الشرط لأن قيمة الدالة غير معلومة عند النقاط x_i)

2)- شرط العقد :

أ)- شرط الاتصال : $S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1})$

$S_0(x_1) = 22 - 9(2-1) - (2-1)^3 = 12$

$S_1(x_1) = a + b(2-2) + c(2-2) + d(2-2)^3$

$= a$

$\Rightarrow \boxed{a = 12}$

ب)- شرط الاستمرار : $S'_j(x_{j+1}) = S'_{j+1}(x_{j+1})$

$S'_0(x) = -9 - 3(x-1)^2$

$S'_1(x) = b + 2c(x-2) + 3d(x-2)^2$

نفرض :

$S'_0(x_1) = -9 - 3(2-1)^2 = -12$

$S'_1(x_1) = b + 2c(2-2) + 3d(2-2)^2$

$= b$

$\Rightarrow \boxed{b = -12}$

ت)- شرط التقعر : $S''_j(x_{j+1}) = S''_{j+1}(x_{j+1})$

$S''_0(x) = -6(x-1)$

$S''_1(x) = 2c + 6d(x-2)$

نفرض :

$S''_0(x_1) = -6(2-1) = -6$

$S''_1(x_1) = 2c + 6d(2-2)$

$= 2c$

$\Rightarrow \boxed{c = -3}$

3)- الشروط الحدية :

الشرط المقيد

$S'(x_n) = f'(x_n) \Rightarrow S'(x_2) = f'(x_2)$

$S'(x_0) = f'(x_0) \Rightarrow S'(x_0) = f'(x_0)$

من الفرض : $f(1) = f(3)$

$S'_0(x_0) = S'_0(1) = -9$

$S'_1(x_2) = S'_1(3) = b + 2c(3-2) + 3d(3-2)^2 = 3d - 12$

$\Rightarrow 3d - 12 = -9$

$\Rightarrow \boxed{d = 3}$

" التكامل العددي "

طريقة شبه المنحرف:

يأتي السؤال: استخدم طريقة شبه المنحرف لإيجاد التكامل

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

لإيجاد تكامل $f(x)$ نحدد ما يلي:

1) نقوم بإيجاد $h = |b-a|$

2) نوجد الجدول الآتي:

X_i	X_0	X_1
$Y_i = f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$

نطبق القانون $I \approx \frac{h}{2}[Y_0 - Y_1]$

قانون الخطأ المرتكب:

$$E_I = \left(\frac{h^3}{1} f^{(2)}(\text{ع})\right)$$

نستخدم هذا القانون لإيجاد الخطأ الأعظمي.

مثال: احسب التكامل $\int_1^{2.5} e^{x^2}\,dx$ بالطريقة المنحرف.

طريقة شبه المنحرف.

x	$f(x)$
1	2.71828
2.5	518.013

$h = b - a = 1.5$

$$I(f) \approx \frac{h}{2}(y_0 - y_1)$$

$$\approx \frac{1.5}{2}(2.71828 + 518.013)$$

$$\approx 390.548$$

طريقة سمبسون:

يأتي السؤال: استخدم طريقة سمبسون العادية في إيجاد التكامل

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

لإيجاد التكامل $f(x)$ نقوم بالخطوات

1- $h = \dfrac{|b-a|}{2}$

2- $I \approx \dfrac{h}{3}(Y_0 + 4Y_1 + Y_2)$

قانون الخطأ الأعظمي:

$$E_I = \left[\frac{h^5}{90} f^4(\text{ع})\right]$$

ملاحظة: إن $f^n(\text{ع})$ هي عبارة عن اشتقاق الدالة n مرة أو أخذ المشتق بأعلى قمة.

مثال: احسب التكامل $\int_1^{2.5} e^{x^2}\,dx$ بالطريقة سمبسون.

طريقة سمبسون:

$$h = \frac{b-a}{2} = 0.75$$

$x_i = a + h\,i$ حيث $i = 0, 1, 2$ $\Longleftrightarrow$

x	$f(x)$
1	$e = 2.71828$
1.75	21.3809
2.5	518.013

$$I(f) = \frac{h}{3}(Y_0 + 4Y_1 + Y_2) = 151.564$$

ملاحظة: إذا أتى السؤال جدول X_i وصورها نقوم بالتعويض في القوانين مباشرة وأما إذا كانت معطاة قيم X_i نقوم بإيجاد $f(X_i)$ من خلال التعويض وإنشاء جدول ومن ثم حساب التكامل.

طريقة شبه المنحرف المركبة :

إيجاد التكامل بطريقة شبه المنحرف المركبة .

$$I(f) = \frac{h}{2}\left[y_0 + 2y_1 + 2y_2 \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right]$$

$$h = \frac{|b-a|}{n}$$

n: عدد النقاط التقسيم (عدد المجالات) .

قانون الخطأ :

$$E_I = \left|\frac{h^2(b-a)}{12} \cdot f^{(2)}(\xi)\right|$$

مثال: احسب التكامل $\int_0^2 e^x dx$ بطريقة شبه المنحرف المركبة

$$f(x) = e^x$$

i	x	$f(x)$
0	0	1
1	0.25	1.28403
2	0.50	1.64872
3	0.75	2.117
4	1	2.71828
5	1.25	3.49034
6	1.50	4.48169
7	1.75	5.75460
8	2	7.38906

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{8} = \frac{1}{4}$$

$$I \approx \frac{h}{2}\left[y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_7 + y_8\right] \approx \frac{0.25}{2}[\cdots$$

$$\approx 6.4222975$$

$$E_I = \left|\frac{(0.25)^2(2-0)}{12} e^2\right|$$

سمبسون المركبة :

إيجاد التكامل بطريقة سمبسون المركبة

$$I(f) = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n\right]$$

يشترط أن تكون n زوجي وإلا لا يمكن تطبيق سمبسون المركبة .

قانون الخطأ :

$$E_I = \left|\frac{h^4(b-a)}{180} f^4(\xi)\right|$$

مثال: احسب التكامل $\int_0^2 e^x dx$ بطريقة سمبسون المركبة .

$$I(f) \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 4y_7 + y_8\right]$$

$$\approx \frac{0.25}{3}[\cdots]$$

$$\approx 6.3891933$$

$$E_I = \frac{(0.25)^4(2-0)}{180} e^2$$

$$= 0.0003207056$$

$$= 0.32056 \times 10^{-3}$$

" التفاضل العددي "

يعرف التفاضل العددي بأنه إجرائية عددية لحساب قيمة المشتق للدالة ما عند نقطة محددة مثل لتكن لدينا الدالة $f(x)$ لحساب قيمة المشتق $f'(x)$ التقريبية نقوم باستخدام القوانين التالية من الجدول الآتي (استنتاج القوانين غير مطلوب).

القانون العام للمشتق:
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

h: هي المسافة بين نقطتين.

عدد النقاط	قانون المشتق $f'(x)$	الخطأ
2	تقدمية $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$	$E = \left\lvert \frac{h}{2} f''(\theta_x) \right\rvert$
2	تراجعية $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$	$E = \left\lvert \frac{h}{2} f''(\theta_x) \right\rvert$
3	تقدمية $f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)]$	$E = \left\lvert \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\theta_x) \right\rvert$
3	مركزية $f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}[-f(x_0-h) + f(x_0+h)]$	$E = \left\lvert \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\theta_x) \right\rvert$
3	تراجعية $f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0-2h) - 4f(x_0-h) + 3f(x_0)]$	$E = \left\lvert \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\theta_x) \right\rvert$
5	مركزية $f'(x_0) \approx \frac{1}{12h}[f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)]$	$E = \left\lvert \frac{h^4}{5} f^{(5)}(\theta_x) \right\rvert$
5	$f'(x_0) \approx \frac{1}{12h}[-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)]$	$E = \left\lvert \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\theta_x) \right\rvert$

ملاحظات حول السؤال:

1)- إذا لم تكن معطاة صيغة الدالة f لا نطلب حساب الخطأ.

2)- سنقوم بتوضيح بقية الملاحظات من خلال المثال:

مثال: أوجد المشتق للدالة f عند $x_0=0.2$ علماً أن:

x_i	0.1	0.2	0.4
$f(x_i)$	2.11	3.04	5.12

الحل: لدينا

$h_1 = 0.4 - 0.2 = 0.2$

$h_2 = 0.2 - 0.1 = 0.1$

نلاحظ أن النقاط ليست متساوية البعد لذلك لا نطبق قانون مشتق الدالة عند ثلاث نقاط لذلك فإننا نلجأ لقانون الاشتقاق الذي يحوي نقطتين ومنه فإننا نعتبر النقطتان هما:

وهنا لدينا المشتق المطلوب عندما $x=0.2$

$x_0 = 0.2$, $x_1 = x_0 + h = 0.2 + 0.2 = 0.4$; $h = 0.2$

نطبق قانون التقدمية لنقطتين لأننا أخذنا النقطة التي تليها.

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{5.12 - 3.04}{0.2} = 10.4$$

ثم نعتبر النقطتان هما :

$x_0=0.2$ ، $x_1 = x_0 + h = 0.2 - 0.1 = 0.1$; $h=0.1$

نطبق قانون التراجعية لنقطتين لأننا أخذنا النقطة التي قبلها ..

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)-f(x_1-h)}{h} = \frac{3.04-2.11}{0.1} = 9.3$$

تتمة الملاحظات : (شرح وافي للفكرة).

2)- ننتبه على مكان وجود النقطة المطلوب حساب المشتق عندها

3)- فلو كانت النقطة المطلوب حساب المشتق عندها هي 0.2 وهي في المنتصف عندئذٍ نطبق قانون المركزية لثلاث نقاط.

4)- ولو كانت النقطة المطلوب حساب المشتق عندها هي 0.1 وهي أول نقطة نطبق قانون التقدمية لثلاث نقاط.

5)- أما إذا كانت النقطة المطلوب حساب المشتق عندها هي 0.4 وهي آخر نقطة نطبق قانون التراجعية لثلاث نقاط.

في حال كانت النقاط غير متساوية البعد مثل مثالنا السابق :

1)- ننتبه على مكان وجود النقطة المطلوب حساب المشتق عندها لمعرفة استخدام القوانين المناسبة لهذه الحالة.

2)- نقسم النقاط الثلاث إلى نقطتين ونطبق عليهم قانون مناسب لهم علماً أن النقطة المطلوب حساب المشتق عندها هي أحد النقاط والنقطة الثانية إحدى النقطتين الثانيتين.

3)- فمثلاً في المثال السابق كانت النقطة المطلوب حساب المشتق عندها هي في المنتصف فبذلك نقسم النقط الثلاثة إلى x_0, x_0+h_2 ونطبق عليهم قانون التقدمية لأننا أخذنا النقطة المطلوب حساب المشتق عندها والنقطة التي تليها، ثم نقسم النقط الثلاثة إلى x_0 و x_0-h_1 ونطبق عليهم قانون التراجعية لأننا أخذنا النقطة المطلوب حساب المشتق عندها والنقطة التي قبلها

$$\underbrace{0.1 \quad 0.2}_{h_1}\underbrace{\quad 0.4}_{h_2}$$

4)- فإذا كانت النقطة المطلوب حساب المشتق عندها هي 0.1 وهي أول نقطة نقسم النقاط إلى $x_0=0.1, x_0+h_1=0.2$ ثم نطبق قانون التقدمية لأننا أخذنا النقطة المطلوب حساب المشتق عندها والنقطة التي تليها ثم نقسم النقاط إلى: $x_0=0.1$ ، $x_0+h_2=0.4$ ثم نطبق قانون التقدمية لأننا أخذنا النقطة المطلوب حساب المشتق عندها والنقطة التي تليها.

5)- إذا كانت النقطة المطلوب حساب المشتق عندها هي 0.4 وهي آخر نقطة نقسم النقاط إلى: $x_0=0.4, x_0-h_2=0.2$ ثم نطبق عليها قانون التراجعية لأننا أخذنا النقطة المطلوب حساب المشتق عندها والنقطة التي قبلها، ثم نقسم النقاط إلى: $x_0=0.4, x_0-h_1=0.1$ ثم نطبق عليها قانون التراجعية لأننا أخذنا النقطة المطلوب حساب المشتق عندها والنقطة التي قبلها.

مثال آخر: استخدام أفضل الصيغ لإتمام الجدول التالي :

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0.1	2.11	
0.2	3.56	
0.3	1.02	

المطلوب

نستخدم ثلاث نقاط للصيغة التقدمية والمركزية والتراجعية.

$h = x - x_0 = x_2 - x_1 = 0.1$ نلاحظ أن النقاط الثلاث متساوية البعد

حل: نطبق القوانين التي تحوي ثلاث نقاط لأن النقاط متساوية البعد

* لنوجد المشتق عند $x_0 = 0.1$:

نلاحظ أن 0.2 هي نقطة المنتصف (المركز) أي سنطبق عليها قانون المركزية لثلاث نقط

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[-f(x_0 - h) + f(x_0 + h)\right]$$

$$\Rightarrow f'(0.2) = \frac{1}{2(0.1)}\left[-(2.11) + 1.02\right] = -5.45$$

* لنوجد المشتق عند $x_0 = 0.3$:

نلاحظ أن 0.3 هي آخر نقطة أي سنطبق عليها قانون التراجعية لثلاث نقط.

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[f(x_0 - 2h) - 4f(x_0 - h) + 3f(x_0)\right]$$

$$\Rightarrow f'(0.3) = \frac{1}{2(0.1)}\left[(2.11) - 4(3.56) + 3(1.02)\right] = -45.35$$

نعطي قانون الخطأ الكلي بالصيغة المركزية

$$e(h) = \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6} \cdot M$$

وعندئذٍ تعطى الصيغة المثلى لـ h بالعلاقة :

$$h = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M}}$$

مثال: أوجد مشتق الدالة $f(x) = e^{-x} \cdot \sin x$ عند النقطة : $x = 1.0$ من أجل $h = 0.5$

باستخدام ثلاث نقاط بالصيغة التقدمية والمركزية والتراجعية واحسب الخطأ الأعظمي المرتكب.

حل: $x_0 + h = 1.5$, x_0 $h = 0.5$

x_i	$f(x_i)$
0.5	0.29079
1.0	0.30956
1.5	0.2226

أولاً: نعوض بقانون الصيغة التقدمية :

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)\right]$$

$$= \frac{1}{2(0.5)}\left[-3f(1.0) + 4f(1.0 + 0.5) - f(1.0 + 2(0.5))\right]$$

$$= \frac{1}{1}\left[-3f(1.0) + 4f(1.5) - f(2)\right]$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = -0.161455$$

والخطأ الأعظمي المرتكب للصيغة التقدمية هو : $E = \frac{h^2}{3}\left|f^{(3)}(\theta_x)\right|$

نوجد $f^{(3)}(\theta_x)$ حيث لدينا :

$$f'(x) = -e^{-x} \cdot \sin x + e^{-x} \cdot \cos x$$

$$f''(x) = e^{-x}\cdot\sin x - e^{-x}\cdot\cos x \,.\, \cos x - e^{-x}\cdot\sin x = -2e^{-x}\cdot\cos x$$

$$f'''(x) = 2e^{-x}\cdot\cos x + 2e^{-x}\cdot\sin x = 2e^{-x}(\sin x + \cos x)$$

$$\Rightarrow |f^{(3)}(\theta_x)| = 2$$

$$\Rightarrow E \leq \frac{(0.5)^2}{3}\cdot 2 \leq 0.166667$$

ثانياً: نعوض بقانون الصيغة المركزية :

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-f(x_0-h) + f(x_0+h)]$$

$$= \frac{1}{2(0.5)}[-f(1.0-0.5) + f(1.0+0.5)]$$

$$= \frac{1}{1}[-f(0.5) + f(1.5)]$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0.166667$$

ولحساب الخطأ الأعظمي المرتكب للصيغة المركزية نعلم أن :

$$E = \frac{h^2}{6}|f^{(3)}(\theta_x)|$$

$$\Rightarrow E \leq \frac{(0.5)^2}{6}\cdot 2 = 0.833333$$

ثالثاً: نعوض بقانون الصيغة التراجعية :

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0-2h) - 4f(x_0-h) + 3f(x_0)]$$

$$= \frac{1}{2(0.5)}[f(1.0-2(0.5)) - 4f(1.0-0.5) + 3f(1.0)]$$

$$\approx \frac{1}{1}[f(0) - 4f(0.5) + 3f(1.0)]$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = -0.234466$$

والخطأ الأعظمي المرتكب للصيغة التراجعية هو نفسه الخطأ الأعظمي المرتكب للصيغة التقدمية :

$$E = \frac{h^2}{3}|f^{(3)}(\theta_x)|$$

$$\Rightarrow E \leq \frac{(0.5)^2}{3}\cdot 2 \leq 0.166667$$

"القيمة التقريبية للمشتق من مراتب عليا"

تنويه: الاستنتاج غير مطلوب.

ليكن قانون المشتق من المرتبة الثانية:

$$f''(x_0)=\frac{1}{h^2}\left[f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)\right]-\frac{h^2}{12}\left[f^{(4)}(\theta_x)\right]$$

حيث أننا نسمي المشتق: $\frac{1}{h^2}\left[f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)\right]$ بالقيمة التقريبية

ونسمي $\frac{h^2}{12}\left[f^{(4)}(\theta_x)\right]$ بقيمة الخطأ المركب E.

مثال: أوجد المشتق من المرتبة الثانية للدالة $f(x)=e^{-x}\cdot\sin x$ المعطاة عند النقطة $x_0=1.0$ علماً: $h=0.5$

الحل:

$$f''(x_0)=\frac{1}{h^2}\left[f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)\right]-\frac{h^2}{12}\left[f^{(4)}(\theta_x)\right]$$

$$\approx\frac{1}{(0.5)^2}f(1-0.5)-2f(1.0)+f(1+0.5)$$

$$\approx\frac{1}{(0.5)^2}f(0.5)-2f(1.0)+f(1.5)$$

$$\approx\frac{1}{(0.5)^2}e^{-0.5}\sin(0.5)-2e^{-1.0}\quad+e^{-1.5}\sin(1.5)$$

$$\approx 0.423049$$

والخطأ الأعظمي المركب هو:

$$=\left|\frac{1}{12}h^2f^{(4)}(\theta)\right|$$

نوجد $f^{(4)}(\theta)$:

$$f(x)=e^{-x}\sin x$$

$$f'(x)=-e^{-x}\cdot\sin x+e^{-x}\cdot\cos x$$

$$f''(x)=e^{-x}\cdot\sin x-e^{-x}\cdot\cos x-e^{-x}\cdot\cos x-e^{-x}\cdot\sin x=-2e^{-x}\cdot\cos x$$

$$f'''(x)=2e^{-x}\cdot\cos x+2e^{-x}\cdot\sin x=2e^{-x}(\sin x+\cos x)$$

$$\Rightarrow f^{(4)}(x)=-4e^{-x}\cdot\sin x$$

ملاحظة: للإيجاد قيمة (θ) للمشتق يجب دراسة تغيرات الدالة (وقد كانت دراسة الدالة في مقررنا منذ البداية هي عبارة إذا كانت الدالة متزايدة نأخذ أعلى قيمة للمجال وإذا كانت متناقصة نأخذ أصغر قيمة للمجال) هنا في مثالنا هنا $\theta=1.3$ بعد دراسة تغيراتها.

$$\Rightarrow E\leq\left|\frac{(0.5)^2}{12}(4e^{-1.3})\right|$$

نأمل أن يكون هذا العمل مفيداً وأن يكون عوناً للطالب في دراسة المقرر ومراجعة الأفكار الامتحانية ..

مع تحيات فريق سيرياماث التطوعي .. "

تم بعون الله