٢٠١٥ تكميلي

الجمهورية العربية السورية
جامعة دمشق
كلية العلوم
قسم الرياضيات

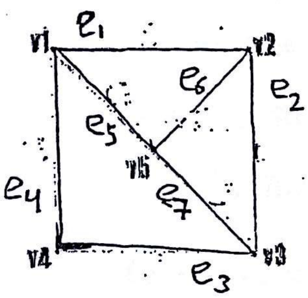
امتحانات الدورة الاضافية للعام الدراسي
2015/2014
مقرر: نظرية البيان
لطلاب السنة الثالثة .

اسم الطالب:
المدة : ساعتان

اجب عن الاسئلة الآتية

السؤال الأول: (20 درجة)

ليكن لدينا البيان H(V;E) التالي:



اوجد ما يلي:

1- أوجد مصفوفة التأثير في البيان H(V;E).
2- أوجد مصفوفة الدوائر الأساسية في البيان H(V;E).
3- ارسم البيان المرافق للبيان B(V;E).
4- أوجد مصفوفة القطع الأساسية H(V;E) .
5- أوجد القطر الداخلي للبيان.
6- أوجد القطر الخارجي البيان.

السؤال الثاني: (15 درجة)

ليكن لدينا البيان $G=(V_1,V_2,V_3,E)$ بيان متعدد الاجزاء (ثلاث أجزاء) تام بحيث $|V_1|=n_1;|V_2|=n_2;|V_3|=n_3$ علما أن $|V|=n=n_1+n_2+n_3$ احسب $|E|$.

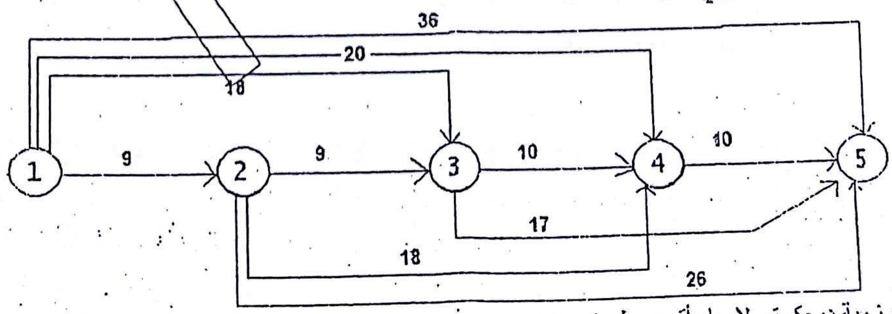
السؤال الثالث: (35 درجة)

اثبت صحة ما يلي:

1- يكون البيان $G=(V;E)$ بيان أولر إذا وفقط إذا كان البيان G بيان مترابط وكانت جميع عقدة زوجية.
2- ليكن لدينا لبيان البسيط G(V;E) إذا وجد $x,y\in V$ و $x\neq y$ حيث يوجد ممران مختلفان من x إلى y فإن البيان يحتوي على دائرة.
3- ليكن لدينا لبيان البسيط G(V;E) بحيث $|V|>1$ عندئذ يكون البيان G بيان زوجي إذا وفقط إذا كان البيان G لا يحتوي على دوائر فردية.

السؤال الرابع: (30 درجة):

ليكن لدينا البيان التالي:



1- طبق خوارزمية ديجكستر لإيجاد أقصر طريق بين v_1 و v_5.
2- استخدام خوارزمية كاسكادا لإيجاد اقصر مسافة بين v_1 و v_5.

2015/9/10

مع تمنياتي لكم بالنجاح

أ.د. خالد الحنيفس

Scanned by CamScanner

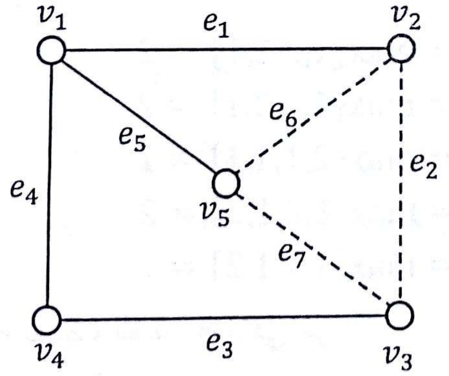
حل دورة 2014-2015 التكميلية

السؤال الأول :

1) مصفوفة التأثير :

$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2) لنوجد أولا شجرة مشدودة على هذا البيان :

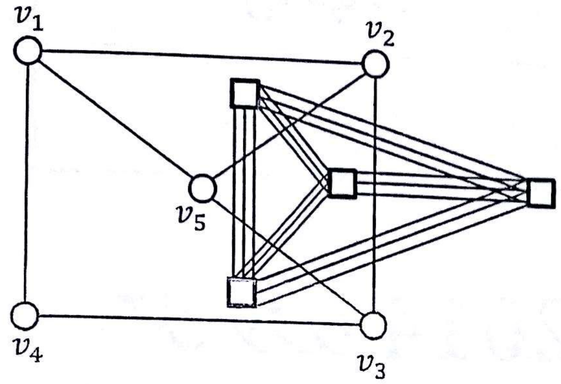


إن الدوائر الاساسية هي :

$$C_{f_1} =< e_3, e_4, e_5, e_7 >$$
$$C_{f_2} =< e_1, e_2, e_3, e_4 >$$
$$C_{f_3} =< e_1, e_5, e_6 >$$

ومنه مصفوفة الدوائر الاساسية هي :

$$C_{f_G} = \begin{array}{c} \\ C_{f_1} \\ C_{f_2} \\ C_{f_3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



3) تم رسم عقد البيان المرافق كمربعات
وأضلاعه كخطوط مضاعفة

4) بالاعتماد على الشجرة المشدودة في الطلب 2 نجد أن مجموعات القطع الرئيسية هي :

$$K_{f_1} =< e_1, e_6, e_2 > \quad K_{f_2} =< e_4, e_7, e_2 >$$
$$K_{f_3} =< e_3, e_7, e_2 > \quad K_{f_4} =< e_5, e_6, e_7 >$$

ومنه مصفوفة القطع الرئيسية هي :

$$K_{f_G} = \begin{array}{c} \\ K_{f_1} \\ K_{f_2} \\ K_{f_3} \\ K_{f_4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

5) إن :

$$e(v_1) = \max\{d(v_1, v_i)\,; i = 2,3,4,5\} = \max\{1,2,1,1\} = 2$$
$$e(v_2) = \max\{d(v_2, v_i)\,; i = 1,3,4,5\} = \max\{1,1,2,1\} = 2$$
$$e(v_3) = \max\{d(v_3, v_i)\,; i = 1,2,4,5\} = \max\{2,1,1,1\} = 2$$
$$e(v_4) = \max\{d(v_4, v_i)\,; i = 1,2,3,5\} = \max\{1,2,1,2\} = 2$$
$$e(v_5) = \max\{d(v_8, v_i)\,; i = 1,2,3,4\} = \max\{1,1,1,2\} = 2$$

ومنه نصف القطر الداخلي هو :

$$r(G) = \min\ \{e(v_i) : i = 1,2,3,4,5\} = \min\{2,2,2,2,2\} = 2$$

6) إن نصف الخارجي هو :

$$R(G) = \max\ \{e(v_i) : i = 1,2,3,4,5\} = \max\{2,2,2,2,2\} = 2$$

السؤال الثاني :

بما أن البيان متعدد الاجزاء وتام فهذا يعني أن كل عقدة من جزء ما ترتبط بجميع العقد التي تنتمي للبيان ولا تنتمي لنفس جزء هذه العقدة أي :

$$\forall x \in V_1 : \deg(x) = n_2 + n_3 \quad \& \quad \forall y \in V_2 : \deg(y) = n_1 + n_3$$
$$\forall z \in V_3 : \deg(z) = n_1 + n_2$$

كما أن :

$$2|E| = \sum_{v\in V} \deg(v) = \sum_{v\in V_1} \deg(v) + \sum_{v\in V_2} \deg(v) + \sum_{v\in V_3} \deg(v)$$
$$= n_1(n_2+n_3) + n_2(n_1+n_3) + n_3(n_1+n_2) = 2n_1n_2 + 2n_1n_3 + 2n_2n_3$$
$$\Rightarrow |E| = n_1n_2 + n_1n_3 + n_2n_3$$

السؤال الثالث :

I) ① الاتجاه المباشر :

اذا كان $G(V;E)$ بيان أويلر فإن قدرات أضلاعه زوجية .

بفرض $G(V;E)$ بيان أويلر فهو يحوي دائرة أويلر (تمر بجميع عقد البيان وأضلاعه) أي أن أي عقدة من البيان (x_i) تتأثر بضلعين من الدائرة (ضلع قبل العقدة وضلع بعدها) عدد من المرات (n_i) حسب تكرار هذه العقدة في الدائرة أي أن جميع العقد تتأثر بعدد زوجي من الأضلاع $(2 \times n_i)$ ، وبما أن البيان هو بيان أويلر فإنه يوجد دائرة تمر بجميع العقد أي تربط بين جميع العقد ومنه البيان مترابط .

② الاتجاه العكسي :

اذا كان البيان $G(V;E)$ مترابط وقدرة عقده زوجية فهو يحوي دائرة أويلر والتي توجد وفق الخوارزمية :

1) نختار عقدة عشوائية x من البيان ومنه $\deg(x) \geq 2$ عندئذٍ يوجد ضلع مثل $e = (x,y)$ وحسب المبرهنة السابقة فإن البيان لا يحوي جسور وبالتالي يمكن أن ننشأ الدائرة $C =< x_1, e_1, \dots, e_{n-1}, x_n = x_1 >$.

2) اذا كانت هذه الدائرة هي دائرة أويلر يتم المطلوب وإذا لم تكن تمر بجميع الأضلاع أو العقد عندئذٍ ننشئ البيان $G' = (V'; E - \{e_1, \dots, e_{n-1}\})$ حيث V' هي V باستثناء العقد المعزولة وحسب

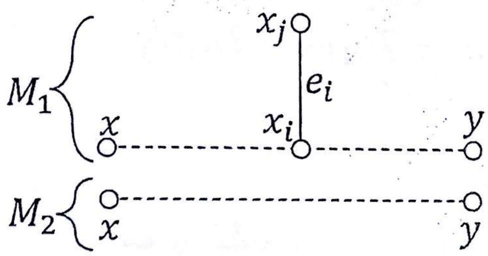
مبرهنة نجد أن $V' \cap \{x_1, \dots, x_n\} \neq \phi$ ومنه نختار عقدة مثل y حيث $y \in V' \cap \{x_1, \dots, x_n\}$

وننشأ من هذه العقدة دائرة C' بنفس الطريقة السابقة ونوجد الدائرة $\overline{C} = C \cup C'$ ،

3) إذا كانت $\overline{C}$ دائرة أويلر يتم المطلوب و إلا نكرر الخطوة الثانية .

وبما أن هذه الخوارزمية توجد لنا دائرة أويلر في هذا البيان فإن البيان هو بيان أويلر .

II) لنفرض أن $x, y \in V \,,\ x \neq y$ وبفرض لدينا الممرين المختلفين $M_1 \neq M_2$ ولنثبت أنه يوجد C بحيث $C \in G$ ، لنناقش الحالات التالية بالنسبة للمسارين :



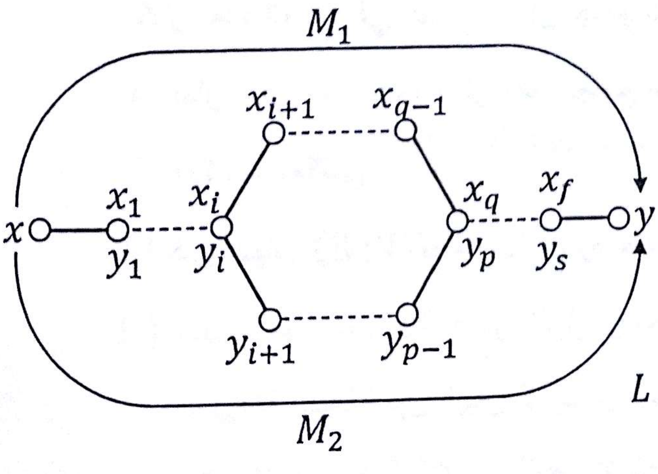
1) حالة الفرق بينهما هو عقدة (و ضلع) : هذه الحالة واضحة حيث الدائرة هي فقط : $< x_i, e_i, x_j, e_i, x_i >$

2) حالة الفرق بينهما أكثر من عقدة (أي أكثر أو يساوي 3 أضلاع) :

لنرقم المسار الأول $(1:f)$ والمسار الثاني $(1:s)$ ولنشكل المجموعة A بحيث :

$$A = \{r : i < r \leq f \ ;\ x_r = y_t \ :\ i < t \leq s \ ;\ x_{r-1} \neq y_{t-1}\}$$

(أي أن r متحول على دليل المسار M_1 والتي يتحقق عندها انطباق عقدتين من M_1 و M_2 و العقدتين اللتان قبلهما مباشرة مختلفتين) ،إن A غير خالية لأنه : بما أن $x_f = y_s$ و $i < s \leq s$ و $i < f \leq f$ فإن $f \in A$ ،



ولنفرض أن دليل أول عقدة من المسار الأول و التي تطابق عقدة من المسار الثاني هو q أي $x_q = y_p$ فيكون لدينا المسارين $L_1 =< x_i, \dots, x_q = y_p >$ و $L_2 =< y_p, \dots, y_i = x_i >$ ومنه يكون المسار

$L = L_1 \cup L_2 =< x_i, \dots, x_q = y_p, \dots, y_i = x_i >$ دائرة .

III) لنفرض أن البيان $G = (V; E)$ بيان زوجي $G = (V_1, V_2, ; E)$ ولتكن $v_1, e_1, v_2, \dots, e_{n-1}, v_n$ دائرة من العقدة x إلى العقدة x نفرض أن $x \in V_1$ ،فإن $x \notin V_2$.

بما أن $v_1 \in V_1$ فإن $v_2 \in V_2$, $v_3 \in V_1$, $v_4 \in V_2$ … إلخ . إذاً $v_i \in V_1$ لكل عدد فردي i أو $v_j \in V_2$ لكل عدد زوجي j . إذاً n عدد فردي وبالتالي ، فإن $v_1, e_1, \ldots, v_n$ دائرة زوجية طولها $n-1$.

الآن نفرض أن $G = (V, E)$ لا يحتوي على دوائر فردية . بما أن البيان G بيان زوجي إذا وفقط إذا كان كل مركبة من مركبات البيان G ثنائية التجزئة فإننا نفرض أن البيان G بيان مترابط . نختار أي عقدة $y \in V$ ونعرف V_1 , V_2 كما يلي :

$$\left(x \in V : \text{عدد زوجي } d(y,x) \Rightarrow x \in V_1\right)$$

$$\left(x \in V : \text{عدد فردي } d(y,x) \Rightarrow x \in V_2 = V - V_1\right)$$

لتكن العقدتين $x, y \in V_2$ حيث $x \neq y$ ولنثبت أن العقدتين y و x غير متجاورتين ، وذلك بوساطة التناقض . نفرض أن $(x, y) \in E$ بما أن $x \in V_2$ فإنه يوجد ممر فردي $x_1, e_1x_2, \ldots, e_{n-1}x_n$ من العقدة Z إلى العقدة x طوله $d(z,x)$. بالمثل ، يوجد ممر فردي $y_1, c_1y_2, \ldots, c_{m-1}\, y_m$ من العقدة Z إلى العقدة y طوله $d(z,y)$ ويما أن $x_1 = y_1 = z$ و $x_n = x \neq y = y_m$ فإننا نستطيع أن نجد عدداً i بحيث :

1) $1 \leq i < n$.

2) يوجد i بحيث $x_i = y_i$.

3) إن العدد i هو أكبر عدد يحقق (1) و(2) .

لنثبت أن $i = j$:

- من أجل $i < j$ فإن $x_1, e_1, x_2, \ldots, x_i = y_j, c_j, \ldots, y_m$ مسار من العقدة Z إلى العقدة y طوله أصغر من $d(z,y)$ وهذا يناقض تعريف المسافة $d(z,y)$.
- من أجل $j < i$ فإننا نحصل بنفس الطريقة على تناقض .

إذاً $i = j$ وبالتالي فإن :

$$z = y_i = x_i\, , e_i\, , \ldots, x_n = x, (x,y)\, , y = y_m\, , c_{m-1}\, , \ldots, y_i = x_i = z$$

دائرة فردية (مسار فردي + ضلع + مسار فردي = دائرة فردية) ، وهذا يتناقض مع فرضنا أن G لا يحتوي على دوائر فردية .

إذاً فإن العقدتين x,y غير متجاورتين . وبنفس الطريقة نجد أنه إذا كان $x,y \in V_1$ حيث $x \neq y$ فإن العقدتين x,y غير متجاورتين . إذاً G بيان زوجي .

السؤال الرابع :

1) نفرض أن $P(1) = 0$ وأن $T(k) = \infty : k = 2,3,4,5$ ولنحسب قيمة $P(2)$:

نعلم أن : $d_{12} = 9$ و $d_{13} = 18$ و $d_{14} = 20$ و $d_{15} = 36$ ومنه :

$$T(2) = \min\{T(2), P(1) + d_{12}\} = \min\{\infty, 0 + 9\} = 9$$
$$T(3) = \min\{T(3), P(1) + d_{13}\} = \min\{\infty, 0 + 18\} = 18$$
$$T(4) = \min\{T(4), P(1) + d_{14}\} = \min\{\infty, 0 + 20\} = 20$$
$$T(5) = \min\{T(5), P(1) + d_{15}\} = \min\{\infty, 0 + 36\} = 36$$
$$\Rightarrow P(2) = \min\{T(2), T(3), T(4), T(5)\}$$
$$= \min\{9, 18, 20, 36\} = 9$$

لنحسب $P(3)$: نعلم أن $d_{23} = 9$ و $d_{24} = 18$ و $d_{25} = 26$ ومنه :

$$T(3) = \min\{18, 9 + 9\} = 18 \quad \& \quad T(4) = \min\{20, 9 + 18\} = 20$$
$$T(5) = \min\{36, 9 + 26\} = 35 \quad \Rightarrow P(3) = \min\{18, 20, 35\} = 18$$

لنحسب $P(4)$: نعلم أن $d_{34} = 10$ و $d_{35} = 17$ ومنه :

$$T(4) = \min\{20, 18 + 10\} = 20 \quad \& \quad T(5) = \min\{35, 18 + 17\} = 35$$
$$\Rightarrow P(4) = \min\{20, 35\} = 20$$

لنحسب $P(5)$: نعلم أن $d_{45} = 10$ ومنه :

$$T(5) = \min\{35, 20 + 10\} = 30 \quad \Rightarrow P(5) = \min\{T(5)\} = 30$$

ومنه المسار المطلوب هو : $v_1 \xrightarrow{20} v_4 \xrightarrow{10} v_5$.

2) أولاً لنوجد مصفوفة الابعاد :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 18 & 20 & 36 \\ \infty & 0 & 9 & 18 & 26 \\ \infty & \infty & 0 & 10 & 17 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

-٣٤-

$$\Rightarrow B^2 = B \oplus B = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 18 & 20 & 36 \\ \infty & 0 & 9 & 18 & 26 \\ \infty & \infty & 0 & 10 & 17 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 9 & 18 & 20 & 36 \\ \infty & 0 & 9 & 18 & 26 \\ \infty & \infty & 0 & 10 & 17 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 9 & 18 & 20 & 30 \\ \infty & 0 & 9 & 18 & 26 \\ \infty & \infty & 0 & 10 & 17 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^3 = B^2 \oplus B = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 18 & 20 & 30 \\ \infty & 0 & 9 & 18 & 26 \\ \infty & \infty & 0 & 10 & 17 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 9 & 18 & 20 & 36 \\ \infty & 0 & 9 & 18 & 26 \\ \infty & \infty & 0 & 10 & 17 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 9 & 18 & 20 & \boxed{30} \\ \infty & 0 & 9 & 18 & 26 \\ \infty & \infty & 0 & 10 & 17 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} = B^2$$

ومنه المسار المطلوب هو : $v_1 \xrightarrow{20} v_4 \xrightarrow{10} v_5$ وطوله هو 30 .

انتهى حل دورة 2014-2015 التكميلية