نظرية الاحتمالات

((حل تمارين))

تذكرة: دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي:

ليكن X متغير عشوائي مستمر دالة كثافته الاحتمالية هي $f_X(x)$ عندئذٍ تكون دالة التوزيع الاحتمالي لـ X :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

وبحيث :

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

الشعاع العشوائي:

بفرض X , Y متغيران عشوائيان مستمران ، فيكون (X , Y) شعاعاً عشوائياً ، كثافته الاحتمالية هي: $f_{X,Y}(x, y)$

وبفرض (X , Y) شعاع عشوائي مستمر فإن الكثافات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية X , Y ، تعطى بالعلاقات:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dx$$

الانتقال بمتغير عشوائي:

بفرض لدينا X متغير عشوائي كثافته الاحتمالية $f_X(x)$

وليكن $Y = g(x)$ عندئذٍ فإن Y سيكون متغير عشوائي

ولإيجاد دالة كثافته الاحتمالية $f_Y(y)$ أو دالة توزيعه الاحتمالية $F_Y(y)$ نستخدم المبرهنة التالية،

مبرهنة:

إذا كانت الدالة g مطردة (متزايدة دوماً أو متناقصة دوماً)

وكانت h هي الدالة المعاكسة لـ g ، أي:

$$Y = g(x) \iff x = h(y)$$

عندئذٍ يكون:

$$f_y(y) = f_X(h(y)) \cdot \left|\frac{dh(x)}{dy}\right|$$

أو بشكل عام إن:

$$f_y(y)\,|dy| = f_X(x)\,|dx|$$

أما إذا كانت الدالة g ليست مطردة (متزايدة تارةً ومتناقصة تارةً أخرى) عندئذٍ نقسم هذه الدالة لعدة دوال على مجالها بحيث تكون كل دالة منها مطردة، وندرس كل منها على حدى.

تمرين رقم 12 صفحة 155:

ليكن X متغير عشوائي دالة كثافته:

$$f_X(x) = \begin{cases} 20x^3(1-x) & ; \quad 0 < x < 1 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عيّن كثافة المتغير $Y = 15X + 10$

الحل: نلاحظ أن الدالة $Y = 15X + 10$ هي دالة متزايدة دوماً (مطردة) فتكون الدالة العاكسة لها:

$$x = \frac{Y-10}{15} = h(y) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{dh(y)}{dy} = \frac{1}{15}$$

وبالتالي حسب البرهنة السابقة نجد:

$$f_y(y) = f_X(h(y)) \cdot \left|\frac{dh(x)}{dy}\right| = f_X\left(\frac{y-10}{15}\right)\left|\frac{1}{15}\right|$$

$$= 20\left(\frac{y-10}{15}\right)^3\left(1 - \frac{y-10}{15}\right) \cdot \frac{1}{15}$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{y-10}{15}\right)^3\left(\frac{25-y}{15}\right)$$

$$= \frac{4}{54}(y-10)^3(25-y) \quad ; \quad 10 < y < 25$$

/ /

ومنه نجد أن دالة الكثافة الهامشية للمتغير Y هي:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{54}(y-10)^3(25-y) & ; \ 10 \leq y \leq 25 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

تمرين رقم 11 صفحة 155:

ليكن X متغير عشوائي دالة توزيعه كالتالي:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; \ x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & ; \ 0 \leq x < 2 \\ 1 & ; \ x \geq 2 \end{cases}$$

عين دالة توزيع المتغير $Y = X^3$ ، احسب $P(Y \leq 3.375)$

الحل:

نعلم أن دالة الكثافة الهامشية للمتغير X تعطى بالعلاقة:

$$f_X(x) = \frac{d F_X(x)}{dx}$$

يمكن أن نكتب:

$$f_X(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & ; \ x < 0 \\ \frac{1}{2}x & ; \ 0 \leq x < 2 \\ 1 & ; \ x \geq 2 \end{cases}$$

نلاحظ أن الدالة $y = g(x) = x^3$ دالة مطردة

ومنه يكون:

$$x = \sqrt[3]{y} = h(y) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{dh(y)}{dy} = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}$$

ومنه حسب المبرهنة السابقة نجد:

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt[3]{y}) \cdot \left| \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} \right| = \frac{\sqrt[3]{y}}{2} \cdot \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{6\sqrt[3]{y}} \ ; \ 0 \leq y \leq 8$$

/ /

ومنه نجد أن دالة الكثافة الهامشية للمتغير Y هي:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & ; \ y < 0 \\ \dfrac{1}{6\sqrt[3]{y}} & ; \ 0 \leq y \leq 8 \\ 1 & ; \ y \geq 8 \end{cases}$$

لحساب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير Y نعلم أن:

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\, dt = \frac{1}{6}\int_0^y \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}\, dt$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{3}{2}\, t^{\frac{2}{3}}\right]_0^y = \frac{1}{4}\, y^{\frac{2}{3}} \quad ; \ 0 \leq y \leq 8$$

ومنه نجد:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & ; \ y < 0 \\ \dfrac{1}{4} y^{\frac{2}{3}} & ; \ 0 \leq y \leq 8 \\ 1 & ; \ y \geq 8 \end{cases}$$

وإذن:

$$P(Y \leq 3.375) = F_Y(3.375) = \frac{1}{4}\sqrt[3]{(3,375)^2}$$

ملاحظة: يمكن حساب دالة التوزيع للمتغير Y بطريقة مباشرة

أصل:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^3 \leq y) = P(X \leq \sqrt[3]{y}) = F_X(\sqrt[3]{y})$$

$$F_Y(y) = F_X(\sqrt[3]{y}) = \begin{cases} 0 & ; \ \sqrt[3]{y} < 0 \\ \dfrac{(\sqrt[3]{y})^2}{4} & ; \ 0 \leq \sqrt[3]{y} < 2 \\ 1 & ; \ \sqrt[3]{y} \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & ; \ y < 0 \\ \dfrac{1}{4} y^{\frac{2}{3}} & ; \ 0 \leq y \leq 8 \\ 1 & ; \ y \geq 8 \end{cases}$$

/ /

مبرهنة (2): لتكن (X, Y) متجهاً عشوائياً مستمراً له دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة $f_{X,Y}(x,y)$ لتكن المتغيرين:

$$U = g_1(X,Y) \quad , \quad V = g_2(X,Y)$$

عندئذٍ فإن كثافة الشعاع (V) تعطى بالعلاقة:

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(h_1(u,v), h_2(u,v)) \cdot |J|$$

حيث:

$$\left.\begin{aligned} u &= g_1(x,y) \\ v &= g_2(x,y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= h_1(u,v) \\ y &= h_2(u,v \end{aligned}$$

وحيث محدد المعقوبي هو:

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

انتهت المحاضرة العشرون ☺