٢٠١٦ ف ٢

الجمهورية العربية السورية
جامعـــة دمشـــق
كليـــة العـلوم
قسـم الرياضيات

امتحانات الفصل الثاني للعام الدراسي 2016/2015 اسم الطالب:

مقرر: نظرية البيان المدة : ساعتان
لطلاب السنة الثالثة

اجب عن الاسئلة التالية

السؤال الأول: (20 درجات)

1- عرف ما يلي:

البيان المنتظم – بيان المناقلة – اجتماع البيانين G_1, G_2 – اتصال البيانين G_1, G_2 – بيان الجداء الديكارتي للبيانين G_1, G_2.

2- ليكن لدينا لبيان البسيط G(V;E) بحيث $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ فاذا كان :

$i, j \Leftrightarrow e_{ij} = (v_i, v_j) \in F$ أوليان فيما بينهما

ارسم البيان

السؤال الثاني: (40 درجة)

اثبت صحة ما يلي:

1- ليكن لدينا لبيان البسيط G(V;E) لا يحوي دوائر $|C| = 3$ وعدد رؤوسه $|V| = 2n$ فإن $|E| \le n^2$

2- يكون البيان البسيط G(V;E) بيان أويلر اذا وفقط كان البيان G بيان مترابط وكانت جميع عقدة زوجية.

3- اثبت انه اذا كانت T شجرة ثنائية فإن عدد العقد المعلقة 1/2(n+1) .

السؤال الثالث: (10 درجات)

لتكن لدينا مجموعة المحارف $C = \{d, f, i, n, m\}$ ولتكن الدالة $f : C \to Z$ معرفة كما يلي:

$f(d) = 5, f(f) = 4, f(i) = 3, f(n) = 13, f(m) = 3$ اوجد ما يلي:

1- شجرة هوفمان

2- شيفرة هو فمان للمجموعة C .

3- وزن الشيفرة

4- شفر الكلمة التالية "mind".

5- فك الشيفرة التالية: 00101110101000.

السؤال الرابع: (30 درجات)

ليكن لدينا البيان الموجه أقواسه معطاة كما يلي:

$$\vec{E} = \{\vec{e_1} = [v_1, v_2] = 6; \vec{e_2} = [v_1, v_3] = 14; \vec{e_3} = [v_1, v_4] = 8; \vec{e_4} = [v_2, v_3] = 4;$$

$$\vec{e_5} = [v_3, v_4] = 2; \vec{e_6} = [v_2, v_6] = 18; \vec{e_7} = [v_3, v_6] = 12; \vec{e_8} = [v_3, v_5] = 6;$$

$$\vec{e_9} = [v_4, v_5] = 6; \vec{e_{10}} = [v_5, v_6] = 6\}$$

1- طبق خوارزمية كاسكادا لإيجاد أقصر طريق بين عقدة البداية وعقدة النهاية.

2- طبق خوارزمية ديجكستر لإيجاد أقصر طريق بين عقدة البداية وعقدة النهاية

2016/6/30 مع تمنياتي لكم بالنجاح

جامعة دمشق كلية العلوم
أ.د. خالد الخنيفس
ح -- ٢٠١٦ ش
الامتحانات

- ٤٧ - النهي

السؤال الأول: (20 درجة)

1. عرف ما يلي:

♠ البيان المنتظم:
نقول عن البيان $G(V;E)$ أنه بيان منتظم إذا كانت قدرات جميع عقده من نفس الدرجة أي إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall\, x \in V : \deg(x) = r$$

♠ بيان المناقلة:
ليكن لدينا البيان المترابط والبسيط $G(V;E)$ عندئذٍ نرمز لبيان المناقلة بالرمز $I(G)$ ويعرف على أنه: البيان الذي عقده تقابل أضلاع البيان الأصلي بحيث تكون كل عقدتين فيه متجاورتين إذا كان الضلعين الأصليين الموافقين لهما متجاورين في البيان الأصلي.

♠ اجتماع البيانين G_1 , G_2:
ليكن لدينا البيانين $G_1(V_1;E_1)$ و $G_2(V_2;E_2)$ عندئذٍ يكون البيان $G(V;E) = G_1 \cup G_2$ هو بيان الاجتماع بحيث:

$$V = V_1 \cup V_2 \quad و \quad E = E_1 \cup E_2$$

♠ اتصال البيانين G_1 , G_2:
ليكن لدينا البيانين $G_1(V_1;E_1)$ و $G_2(V_2;E_2)$ البسيطين والمنفصلين (أي: لا يوجد تقاطع بين مجموعة العقد ومجموعة الأضلاع بينهما) عندئذٍ يكون بيان الاتصال هو البيان

$$G(V;E) = G_1 + G_2$$

وتكون مجموعة عقده $V = V_1 \cup V_2$ وأضلاعه هي مجموعة أضلاع الأول ومجموعة أضلاع الثاني بالإضافة إلى الأضلاع التي تصل بين العقد من البيان الأول مع الثاني
أي مجموعة أضلاعه تعرف بالشكل:

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \{e\,;\ \forall x \in V_1 : e = (x,y)\,;\, y \in V_2\}$$

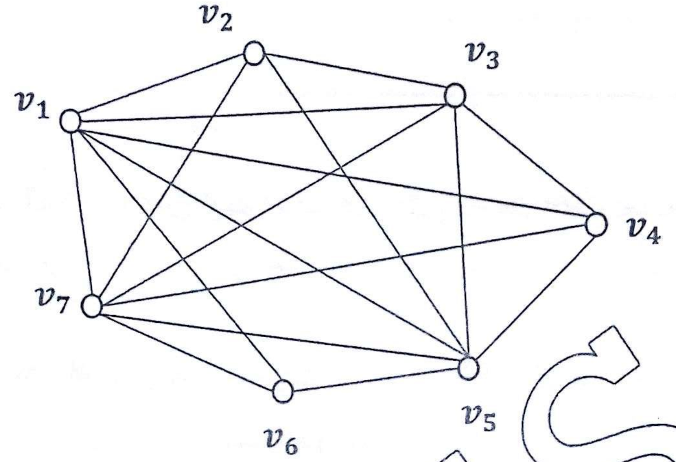
♠ بيان الجداء الديكارتي للبيانين G_1 , G_2:
ليكن لدينا البيانين $G_1(V_1;E_1)$ و $G_2(V_2;E_2)$ المنفصلين عندئذٍ يكون بيان الجداء الديكارتي على الشكل $G(V;E) = G_1 \times G_2$ بحيث مجموعة عقده هي المجموعة:

$$V = V_1 \times V_2 = \{(v,u)\,;\ \ v \in V_1 \wedge u \in V_2\}$$

ومجموعة أضلاعه هي المجموعة:

$$E = \left[\, e\,;\underbrace{\{(v_i = v_j) \wedge (u_i \text{ تجاور } u_j)\}}_{\text{المساقط الأولى متساوية والثانية متجاورة}} \vee \underbrace{\{(v_i \text{ تجاور } v_j) \wedge (u_i = u_j)\}}_{\text{المساقط الأولى متجاورة والثانية مستاوية}} \right]$$

2. في البداية لنرسم بيان مكون من 7 عقد بحيث: $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ ومن ثم نقوم بالوصل بين هذه العقد بأضلاع فقط عندما تكون أدلة هذه العقد أعداد أولية فيما بينها أي عندما لا يوجد بينها قواسم مشتركة سوى الـ 1 وفيما عدا ذلك لا نرسم ضلع , فنجد أن البيان المطلوب هو:



السؤال الثاني: (40 درجة)

أثبت صحة ما يلي:

1) لنثبت صحة المسألة باستخدام الاستقراء الرياضي:

من أجل $\boxed{n=1}$:

$$|V| = 2(1) = 2 \implies |E| \leq (1)^2 = 1$$

محققة لأنه إذا كان G مترابط فإن عدد الأضلاع يساوي 1 وإذا كان غير مترابط فإن عدد الأضلاع 0 .

نفرض صحة العلاقة من أجل $\boxed{n=k}$, أي أن العلاقة التالية محققة:

$$|V| = 2k \implies |E| \leq k^2$$

والآن لنثبت صحة العلاقة من أجل $\boxed{n=k+1}$ بالاعتماد على الفرض الاستقرائي:

من أجل $n = k+1$ يكون لدينا $|V| = 2(k+1) = 2k+2$ ولنثبت أن $|E| \leq (k+1)^2$

ليكن البيان H هو البيان الموافق من أجل $n = k+1$

و ليكن البيان H_1 هو البيان الموافق من أجل $n = k$

ولنفرض أن البيانين H_1 , H مترابطين وأن: $\underbrace{\exists\, u, v \in H \; ; \; u \not\equiv v}_{\text{أي يوجد عقدتين من البيان } H \text{ غير متطابقتين}}$

بحذف العقدتين u , v من البيان H نحصل على البيان H' بحيث: $H' = H - \{\{u\} \cup \{v\}\}$

أي أن: $H' = (V'; E')$ بحيث: $V' = V - \{u, v\}$ و $E' = E - \{u, v$ الأضلاع المؤثرة في العقدتين$\}$

وحسب الفرض الاستقرائي فإنه من أجل البيان H' يكون: $|V'| = 2k \implies |E'| \leq k^2$

بإضافة العقدتين u , v إلى البيان H' نحصل على البيان الأصلي H وبما أن $u \not\equiv v$ إذاً أي عقدة ترتبط بـ v لا ترتبط بـ u وبفرض أن العقدتين u , v متجاورتين في البيان H فإن

إذا كانت $\deg(v) = l$ تكون $\deg(u) = 2k - l$

عندئذٍ يكون عدد الأضلاع:

$$|E| \leq k^2 + l + (2k - l) + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

"انتهى البرهان"

---

2) الاثبات: $\Longleftarrow$

لزوم الشرط بفرض أن البيان G بيان أويلر ولنبرهن على أنه مترابط وجميع عقده زوجية:

بما أن البيان G هو بيان أويلر فإنه يحتوي على دائرة أويلر ولتكن هذه الدائرة :

$$C = < x = x_1, e_1, x_2, \dots\dots, e_{n-1}, x_n = x_1 >$$

وهي دائرة تمر بجميع عقد البيان وأضلاعه وبالتالي يكون البيان G مترابط كما أن كل عقدة من المتتالية

$$e_1, x_2, \dots\dots, x_{n-1}, e_{n-1}$$

تتأثر بعدد زوجي من الأضلاع الموجودة بهذه المتتالية وبما أن C دائرة فإن $x = x_1 = x_n$

وبالتالي جميع عقد البيان G زوجية.

إذاً وجدنا أن البيان G مترابط وجميع عقده زوجية.

كفاية الشرط بفرض G مترابط وجميع عقده زوجية ولنبرهن على أنه بيان أويلر:

ليكون البيان G بيان أويلر يجب أن يحتوي على دائرة أويلر ولأجل ذلك لنبرهن على وجود دائرة أويلر ضمن البيان G وفق الخوارزمية التالية:

I. نختار عقدة عشوائية من البيان G ولتكن x ومنه يكون : $\deg(x) = 2n \geq 2$

وحسب مبرهنة سابقة فإن البيان G لا يحوي جسور ومنه يمكن أن ننشأ الدائرة C بالشكل:

$$C = < x = x_1, e_1, x_2, \dots\dots, e_{n-1}, x_n = x_1 >$$

II. إذا كانت الدائرة C دائرة أويلر يتم المطلوب , وإذا لم تكن كذلك عندئذٍ:

ننشأ البيان H بالشكل $H = (V'; E - \{e_1, \dots, e_{n-1}\})$ حيث V' هي V باستثناء العقد المعزولة وحسب مبرهنة سابقة نجد أن $V' \cap \{x_1, \dots, x_n\} \neq \phi$ وبالتالي:

$$\exists y \ ; \ \ y \in V' \cap \{x_1, \dots, x_n\}$$

ولننشأ من العقدة y الدائرة C' بنفس الطريقة السابقة (حسب الخطوة 1) ونشكل الدائرة $\overline{C} = C \cup C'$

III. فإذا كانت الدائرة $\overline{C}$ دائرة أويلر يتم المطلوب , وإذا لم تكن كذلك نقوم بإعادة الخطوة 2.

"انتهى البرهان"

3) **الاثبات:** $\Leftarrow$

لنفرض أن عدد العقد المعلقة هو m ولدينا البيان شجرة عدد عقده $|V| = n$ ومنه: $|E| = n - 1$

وبما أن الشجرة بيان بسيط فحسب مبرهنة لدينا:

$$\sum_{x \in V} \deg(x) = 2|E|$$

$$\Rightarrow \quad \left(\text{قدرة الجذر}\right) + \left(\text{مجموع قدرات العقد الداخلية}\right) + \left(\text{مجموع قدرات العقد المعلقة}\right) = 2(n-1)$$

$$\Rightarrow \quad (1*2) + \left(3*\underbrace{\left[\overset{\text{عدد العقد}}{n} - \overset{\text{العقد المعلقة}}{m} - \overset{\text{الجذر}}{1}\right]}_{\text{عدد العقد الداخلية}}\right) + (1*m) = 2n - 2$$

$$\Rightarrow \quad 2 + 3(n - m - 1) + m = 2n - 2$$

$$2 + 3n - 3m - 3 + m - 2n + 2 = 0 \;\Rightarrow\; n - 2m + 1 = 0 \;\Rightarrow\; m = \frac{(n+1)}{2}$$

وبالتالي عدد العقد المعلقة بأي شجرة ثنائية هو: $\frac{1}{2}(n+1)$

"انتهى البرهان"

السؤال الثالث: (10 درجات)

1. لنوجد شجرة هوفمان:

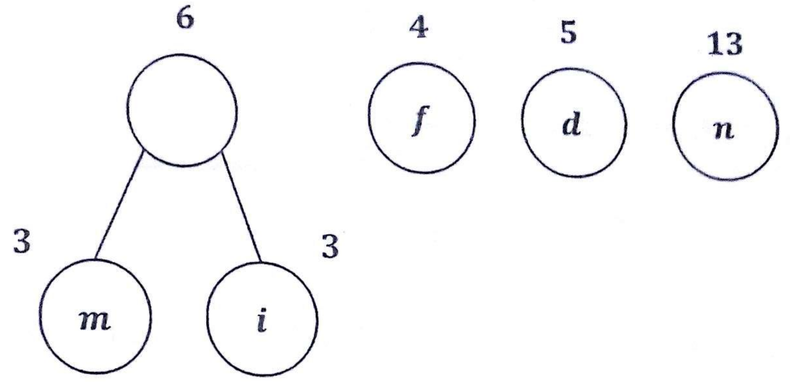
لنشكل العقد التالية من مجموعة المحارف كما يلي:

5	4	3	13	3
d	f	i	n	m

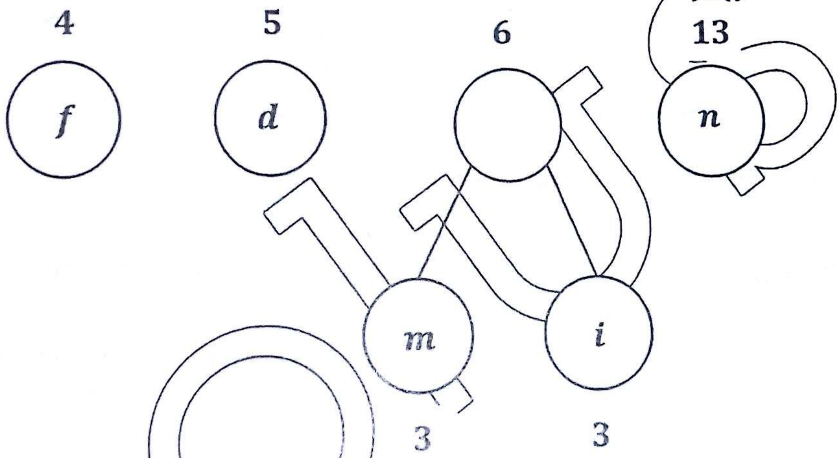
ومن ثم نقوم بترتيب العقد تصاعدياً من اليسار إلى اليمين

3	3	4	5	13
m	i	f	d	n

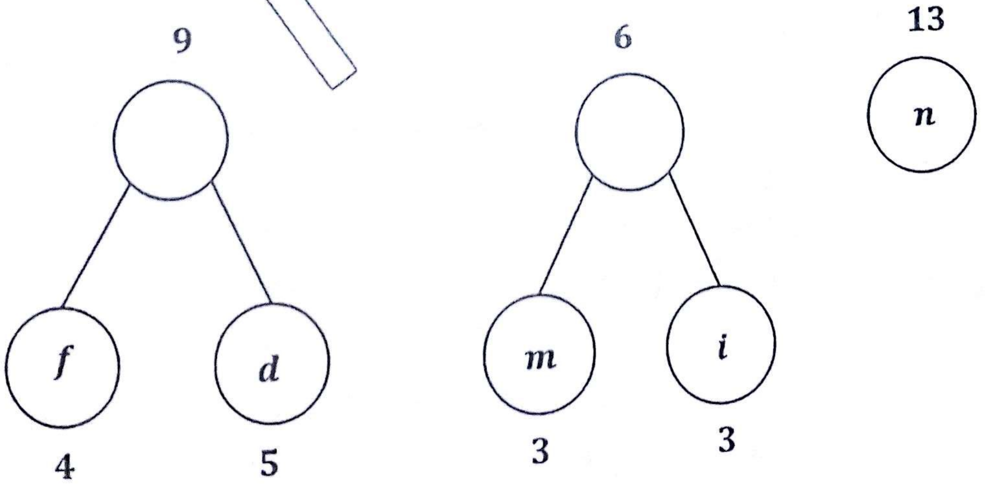
نقوم بجمع أول عقدتين من اليسار معاً فنحصل على عقدة جديدة قدرتها تساوي مجموع قدرتي العقدتين



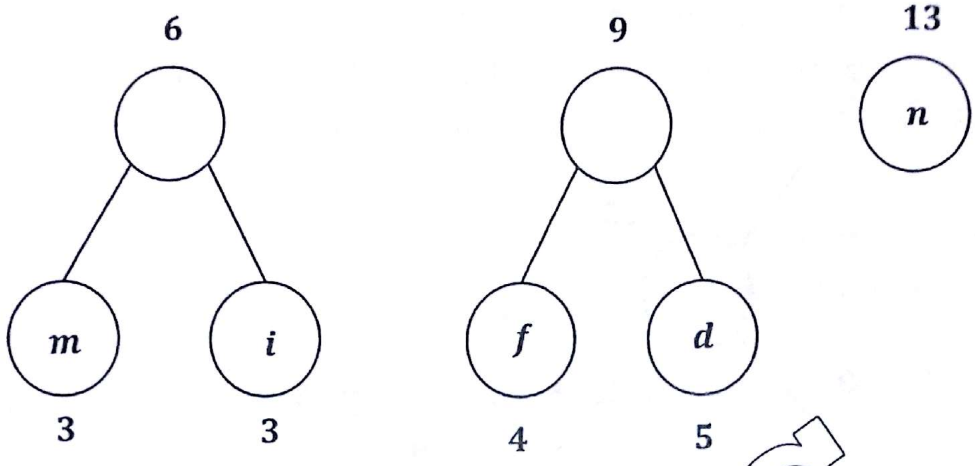
نعيد ترتيب العقد تصاعدياً ونكرر عملية الجمع والترتيب عدة مرات حتى نحصل على شجرة ثنائية منتظمة



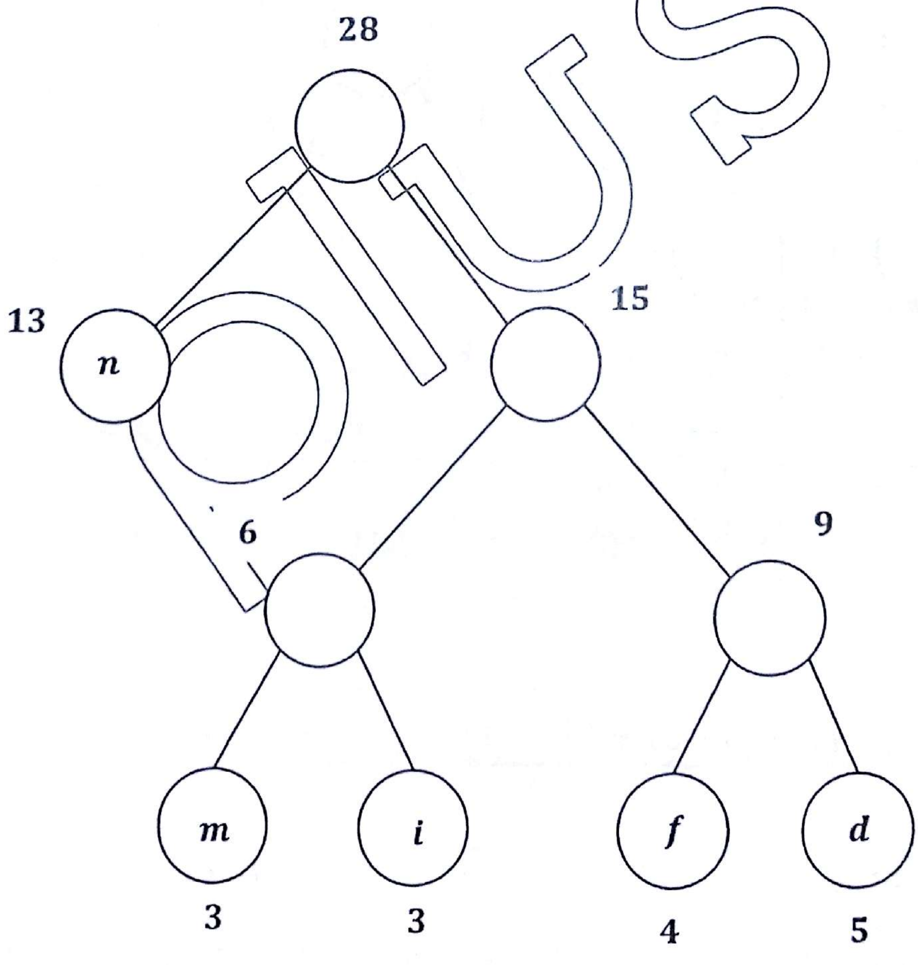
نجمع
⇐



نرتب ⇐

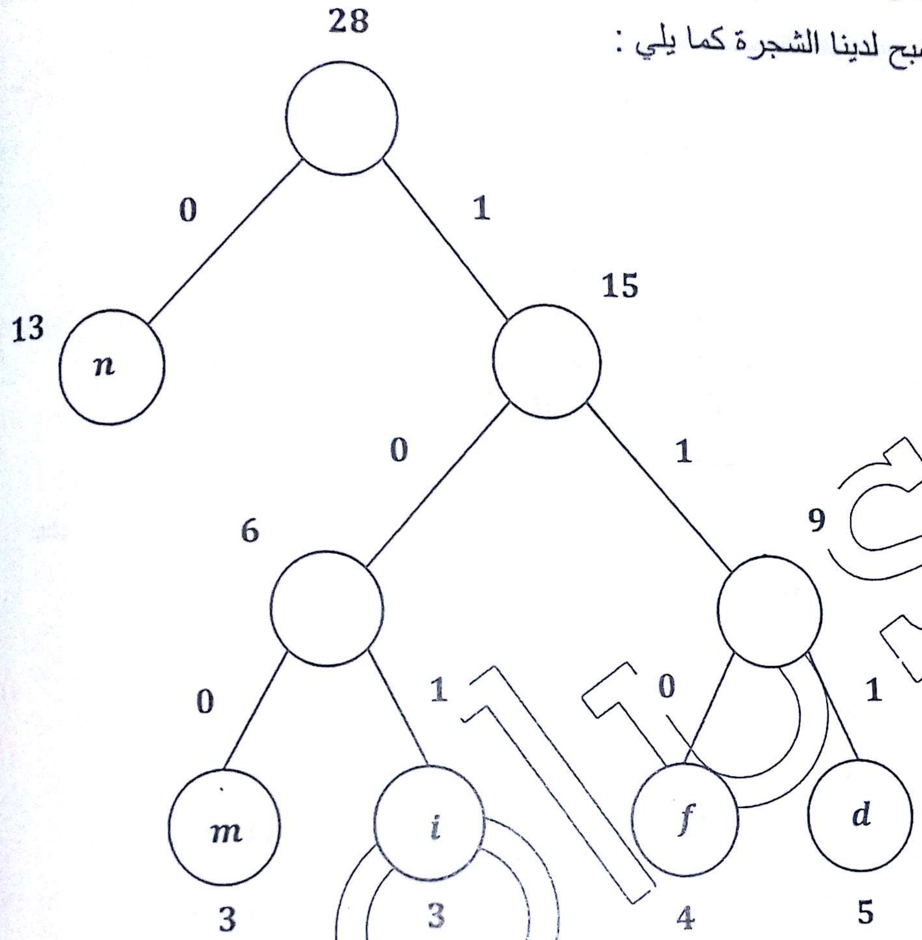


⇐



وهي شجرة هوفمان.

2. لإيجاد شيفرة هوفمان للمجموعة C نقوم أولاً بإعادة رسم الشجرة مع ترقيم كل طرف يساري للعقدة بـ 0 وكل طرف يمين بـ 1 فتصبح لدينا الشجرة كما يلي :



وعليه تكون الشيفرة كما في الجدول التالي:

x	n	m	i	f	d
$code$	0	100	101	110	111

3. وزن الشيفرة:

$$w = \underbrace{(3*5)}_{d} + \underbrace{(3*4)}_{f} + \underbrace{(3*3)}_{i} + \underbrace{(13*1)}_{n} + \underbrace{(3*3)}_{m} = 15 + 12 + 9 + 13 + 9 = 57$$

.4

$$mind \Rightarrow \overbrace{100}^{m}\ \overbrace{101}^{i}\ \overbrace{0}^{n}\ \overbrace{111}^{d} = 1001010111$$

.5

$$00101110101000 = 0\ 0\ 101\ 110\ 101\ 0\ 0\ 0 \Rightarrow nnifinnn$$

السؤال الرابع : (30 درجة)

أولاً: إيجاد أقصر مسافة بين عقدة البداية v_1 وعقدة النهاية v_6 باستخدام خوارزمية ديجكستر:

من أجل أول مرحلة من الخوارزمية نفرض أن $P(1) = 0$ وعندها قيم $T(k)$ حيث $k = 1,2,\dots,6$

جميعها تساوي اللانهاية أي: $T(k) = \infty \;\; ; \;\; k = 1,2,\dots,6$

لنحسب $P(2)$:⇐

لحساب $P(2)$ نوجد أولاً الكلف من $T(2)$ حتى $T(6)$ بحيث:

$$T(2) = \min\{T(\boxed{2}), P(\boxed{1}) + d_{\boxed{1}\boxed{2}}\} = \min\{\infty, 0+6\} = 6 \;\; ; \;\; d_{12} = 6$$

$$T(3) = \min\{T(\boxed{3}), P(\boxed{1}) + d_{\boxed{1}\boxed{3}}\} = \min\{\infty, 0+14\} = 14 \;\; ; \;\; d_{13} = 14$$

$$T(4) = \min\{T(\boxed{4}), P(\boxed{1}) + d_{\boxed{1}\boxed{4}}\} = \min\{\infty, 0+8\} = 8 \;\; ; \;\; d_{14} = 8$$

$$T(5) = \min\{T(\boxed{5}), P(\boxed{1}) + d_{\boxed{1}\boxed{5}}\} = \min\{\infty, \infty\} = \infty \;\; ; \;\; d_{15} = \infty$$

$$T(6) = \min\{T(\boxed{6}), P(\boxed{1}) + d_{\boxed{1}\boxed{6}}\} = \min\{\infty, \infty\} = \infty \;\; ; \;\; d_{16} = \infty$$

(إن: $d_{15} = \infty$ و $d_{16} = \infty$ لأنه لا يوجد طريق يصل بين العقدة v_1 والعقدة v_5 و v_6)

لنوجد قيمة $P(2)$ بحيث أن:

$$P(2) = \min\{T(2), T(3), T(4), T(5), T(6)\} = \min\{6, 14, 8, \infty, \infty\} = 3$$

$$\Longrightarrow \boxed{P(2) = 6}$$

لنحسب $P(3)$:⇐

لحساب $P(3)$ نوجد أولاً الكلف من $T(3)$ حتى $T(6)$ بحيث:

$$T(3) = \min\{T(3), P(2) + d_{23}\} = \min\{14, 6+4\} = 10 \;\; ; \;\; d_{23} = 4$$

$$T(4) = \min\{T(4), P(2) + d_{24}\} = \min\{8, 6+\infty\} = 8 \;\; ; \;\; d_{24} = \infty$$

$$T(5) = \min\{T(5), P(2) + d_{25}\} = \min\{\infty, 6+\infty\} = \infty \;\; ; \;\; d_{25} = \infty$$

$$T(6) = \min\{T(6), P(2) + d_{26}\} = \min\{\infty, 6+18\} = 24 \;\; ; \;\; d_{26} = 18$$

لنوجد قيمة $P(3)$ بحيث أن:

$$P(3) = \min\{T(3), T(4), T(5), T(6)\} = \min\{10, 8, \infty, 24\} = 4$$

$$\Longrightarrow \boxed{P(3) = 8}$$

لنحسب $P(4)$:⇐

لحساب $P(4)$ نوجد أولاً الكلف من $T(4)$ حتى $T(6)$ بحيث:

$$T(4) = \min\{T(4)\,, P(3) + d_{34}\} = \min\{8\,,8 + 2\} = 8 \;\;;\;\; d_{34} = 2$$

$$T(5) = \min\{T(5)\,, P(3) + d_{35}\} = \min\{\infty\,,8 + 6\} = 14 \;\;;\;\; d_{35} = 6$$

$$T(6) = \min\{T(6)\,, P(3) + d_{36}\} = \min\{24\,,8 + 12\} = 20 \;\;;\;\; d_{36} = 12$$

لنوجد قيمة $P(4)$ بحيث أن:

$$P(4) = \min\{T(4), T(5), T(6)\} = \min\{8,14,20\} = 4$$

$$\Longrightarrow \boxed{P(4) = 8}$$

لنحسب $P(5)$:⇐

لحساب $P(5)$ نوجد أولاً الكلف $T(5)$, $T(6)$ بحيث:

$$T(5) = \min\{T(5)\,, P(4) + d_{45}\} = \min\{14\,,8 + 6\} = 14 \;\;;\;\; d_{45} = 6$$

$$T(6) = \min\{T(6)\,, P(4) + d_{46}\} = \min\{20\,,8 + \infty\} = 20 \;\;;\;\; d_{46} = \infty$$

لنوجد قيمة $P(5)$ بحيث أن:

$$P(5) = \min\{T(5), T(6)\} = \min\{14,20\} = 7$$

$$\Longrightarrow \boxed{P(5) = 14}$$

لنحسب $P(6)$:⇐

$$T(6) = \min\{T(6)\,, P(5) + d_{56}\} = \min\{20\,,14 + 6\} = 20 \;\;;\;\; d_{56} = 3$$

$$\Longrightarrow P(6) = \min\{T(6)\} = 10 \;\Longrightarrow\; \boxed{P(6) = 20}$$

وأخيراً نجد أن أقصر مسافة بين عقدة البداية v_1 وعقدة النهاية v_6 ناتجة عن المسار التالي:

$$v_1 \xrightarrow{14} v_3 \xrightarrow{6} v_6$$

أو من المسار:

$$v_1 \xrightarrow{8} v_4 \xrightarrow{6} v_5 \xrightarrow{6} v_6$$

ويوجد مسارات أخرى طولها 20 مختلفة عن المسارات السابقة وليس بالضرورة أن يكون المسار وحيد.

ثانياً إيجاد أقصر مسافة بين عقدة البداية v_1 وعقدة النهاية v_6 باستخدام خوارزمية كاسكادا:

نقوم أولاً بإيجاد مصفوفة الأبعاد للبيان المعطى بحيث تعطى عناصرها بالشكل التالي (حسب التعريف) :

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & if \quad i=j \\ w_{ij} & if \quad \text{يوجد طريق من } v_i \text{ إلى } v_j \\ \infty & if \quad \text{لا يوجد طريق من } v_i \text{ إلى } v_j \end{cases}$$

بحيث w_{ij} هي وزن القوس من العقدة v_i إلى العقدة v_j , وبالتالي مصفوفة الأبعاد لها الشكل:

$$B = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 14 & 8 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 4 & \infty & \infty & 18 \\ \infty & \infty & 0 & 2 & 6 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

ثانياً نقوم بجمع المصفوفة B إلى نفسها وفق عملية الجمع $\oplus$ بحيث تكون العملية $\oplus$ معرفة بالشكل التالي:

$$A \oplus B = C \quad ; \quad c_{ij} = \min\{a_{ik} + b_{kj}\}$$

سنورد مثال توضيحي لعملية الجمع السابقة بعد الانتهاء من تطبيق الخوارزمية وذلك بتكرار عملية الجمع على المصفوفة B حتى نحصل على المساواة $B^n = B^{n+1}$ وذلك كما يلي:

$$\Rightarrow B^2 = B \oplus B = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 & 8 & 14 & 24 \\ \infty & 0 & 4 & 6 & 10 & 16 \\ \infty & \infty & 0 & 2 & 6 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 6 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^3 = B^2 \oplus B = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 & 8 & 14 & 20 \\ \infty & 0 & 4 & 6 & 10 & 16 \\ \infty & \infty & 0 & 2 & 6 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 6 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^4 = B^3 \oplus B = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 & 8 & 14 & \boxed{20} \\ \infty & 0 & 4 & 6 & 10 & 16 \\ \infty & \infty & 0 & 2 & 6 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 6 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن $B^3 = B^4$ ولأجل ذلك نتوقف عن تطبيق الخوارزمية (عن تطبيق عملية الجمع)
ونستنتج من المصفوفة الأخيرة أن أقصر مسافة بين عقدة البداية v_1 وعقدة النهاية v_6 هي 20 (وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها من تطبيق خوارزمية ديجكستر في الطلب السابق)

"انتهى الحل"

انتهى حل الأسئلة

Mohammad
Malas

محرم ٢٠١٦

الجمهورية العربية السورية
جامعــة دمشــق
كليــة العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الثالث للعام الدراسي 2016/2015 اسم الطالب:

مقرر: نظرية البيان المدة : ساعتان
لطلاب السنة الثالثة

اجب عن الاسئلة التالية

السؤال الأول: (20 درجات)

1. عرف ما يلي:

اجتماع البيانين G_1, G_2 – بيان المناقلة – اجتماع البيانين G_1, G_2 – اتصال البيانين G_1, G_2 – بيان الجداء الديكارتي للبيانين G_1, G_2.

2. ليكن لدينا البيان البسيط G(V;E) بحيث $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ فاذا كان :

$$i < j \Leftrightarrow e_{ij} = (v_i, v_j) \in E$$

ارسم البيان

السؤال الثاني: (50 درجة)

اثبت صحة ما يلي:

أ- ليكن لدينا البيان البسيط G(V;E) يملك k مركبة، بحيث |V|=n, |E|=m عندئذ يكون عدد أضلاع البيان على الأكثر $\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$

2- اثبت أنه اذا كانت T شجرة ثنائية فإن ما يلي يتحقق:

عدد العقد عدد فردي

3- ليكن لدينا البيان البسيط G(V;E) لا يحوي دوائر $|C| = 3$ وعدد رؤوسه $|V| = 2n$ فإن $|E| \le n^2$

السؤال الثالث: (10 درجات)

لتكن لدينا مجموعة المحارف $C = \{d, f, i, n, m\}$ ولتكن الدالة $f : C \to Z$ معرفة كما يلي:

$f(d) = 5, f(f) = 4, f(i) = 3, f(n) = 13, f(m) = 3$ أوجد ما يلي:

1- شجرة هوفمان
2- شيفرة هو فمان للمجموعة C .
3- وزن الشيفرة
4- شفر الكلمة التالية "mind".
5- فك الشيفرة التالية: 00101110101000.

السؤال الرابع: (20 درجات)

ليكن لدينا البيان الموجه أقواسه معطاة كما يلي:

$$\vec{E} = \{\vec{e_1} = [v_1, v_2] = 3; \vec{e_2} = [v_1, v_3] = 7; \vec{e_3} = [v_1, v_4] = 8; \vec{e_4} = [v_2, v_3] = 14;$$

$$\vec{e_5} = [v_3, v_4] = 4; \vec{e_6} = [v_2, v_6] = 18; \vec{e_7} = [v_3, v_6] = 15; \vec{e_8} = [v_3, v_5] = 13;$$

$$\vec{e_9} = [v_4, v_5] = 9; \vec{e_{10}} = [v_5, v_6] = 24\}$$

1- طبق خوارزمية كاسكادا لإيجاد أقصر طريق بين عقدة البداية وعقدة النهاية.
2- طبق خوارزمية ديجكستر لإيجاد أقصر طريق بين عقدة البداية وعقدة النهاية

مع تمنياتي لكم بالنجاح 2016/ /

أ.د. خالد الخنيفس

١٠١٦

-١٢- الرنة
-٥٩-

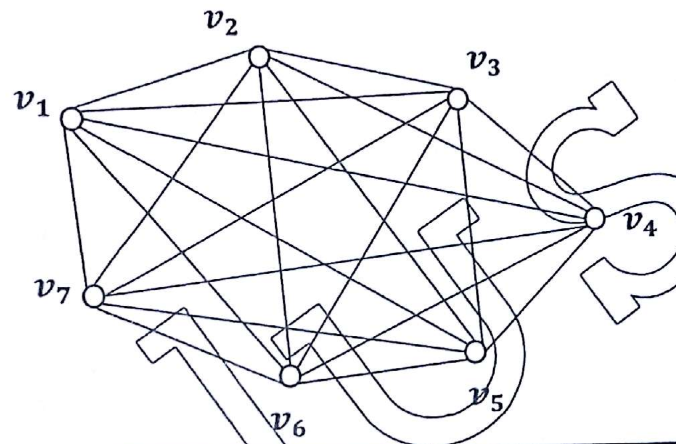
السؤال الأول: (20 درجة)

1. عرف ما يلي:

سؤال دورة سابق والحل موجود في الدورة السابقة فصل ثاني 2015-2016

---

2. في البداية لنرسم بيان مكون من 7 عقد بحيث: $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ ومن ثم نقوم بالوصل بين هذه العقد بأضلاع فقط عندما يكون **دليل** العقدة الخارج منها الضلع أصغر من **دليل** العقدة الداخل فيها الضلع وفيما عدا ذلك لا نرسم ضلع , فنجد أن البيان المطلوب هو:



السؤال الثاني: (40 درجة)

أثبت صحة ما يلي:

1) ليكن لدينا البيان البسيط $G(V;E)$ يملك k مركبة بحيث $|E| = m , |V| = n$ عندئذٍ يكون عدد أضلاع البيان على الأكثر $\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$

سؤال دورة سابق والحل موجود ضمن دورة الفصل الأول 2015-2016

---

2) أثبت أنه إذا كانت T شجرة ثنائية فإن ما يلي محقق : عدد العقد هو عدد فردي

الاثبات: $\Longleftarrow$

في الشجرة الثنائية المنتظمة قدرة أي عقدة داخلية وأي عقدة معلقة هو عدد فردي وحسب مبرهنة سابقة فإن: عدد العقد الفردية في أي بيان بسيط هو عدد زوجي (الشجرة بيان بسيط) , ولدينا:

عدد فردي = عدد زوجي + 1 = $\underbrace{\text{عدد العقد المعلقة + عدد العقد الداخلية}}_{\text{عدد زوجي}}$ + $\underbrace{\text{الجذر}}_{\text{عقدة واحدة}}$ = $n = |V|$

"انتهى البرهان"

3) ليكن لدينا البيان البسيط $G(V;E)$ لا يحوي دوائر $|C| = 3$ وعدد رؤوسه (عقده) $|V| = 2n$
عندئذٍ فإن: $|E| < n^2$
سؤال دورة سابق والحل موجود في الدورة السابقة فصل ثاني 2016-2015

السؤال الثالث: (10 درجات)

سؤال دورة سابق والحل موجود في الدورة السابقة فصل ثاني 2016-2015

السؤال الرابع: (30 درجة)

أولاً: إيجاد أقصر مسافة بين عقدة البداية v_1 وعقدة النهاية v_6 باستخدام خوارزمية ديجكستر:

من أجل أول مرحلة من الخوارزمية نفرض أن $P(1) = 0$ وعندها قيم $T(k)$ حيث $k = 1,2,\dots,6$
جميعها تساوي اللانهاية أي: $T(k) = \infty \;;\; k = 1,2,\dots,6$

لنحسب $P(2)$:⇐

لحساب $P(2)$ نوجد أولاً الكلف من $T(2)$ حتى $T(6)$ بحيث:

$$T(2) = \min\{T(\boxed{2}), P(\boxed{1}) + d_{\boxed{1}\boxed{2}}\} = \min\{\infty, 0 + 3\} = 3 \;;\; d_{12} = 3$$

$$T(3) = \min\{T(\boxed{3}), P(\boxed{1}) + d_{\boxed{1}\boxed{3}}\} = \min\{\infty, 0 + 7\} = 7 \;;\; d_{13} = 7$$

$$T(4) = \min\{T(\boxed{4}), P(\boxed{1}) + d_{\boxed{1}\boxed{4}}\} = \min\{\infty, 0 + 8\} = 8 \;;\; d_{14} = 8$$

$$T(5) = \min\{T(\boxed{5}), P(\boxed{1}) + d_{\boxed{1}\boxed{5}}\} = \min\{\infty, 0 + \infty\} = \infty \;;\; d_{15} = \infty$$

$$T(6) = \min\{T(\boxed{6}), P(\boxed{1}) + d_{\boxed{1}\boxed{6}}\} = \min\{\infty, 0 + \infty\} = \infty \;;\; d_{16} = \infty$$

(إن: $d_{15} = \infty$ و $d_{16} = \infty$ لأنه لا يوجد طريق يصل بين العقدة v_1 والعقدة v_5 و v_6)

لنوجد قيمة $P(2)$ بحيث أن:

$$P(2) = \min\{T(2), T(3), T(4), T(5), T(6)\} = \min\{3, 7, 8, \infty, \infty\} = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{P(2) = 3}$$

لنحسب $P(3)$:⇐

لحساب $P(3)$ نوجد أولاً الكلف من $T(3)$ حتى $T(6)$ بحيث:

$$T(3) = \min\{T(3)\,, P(2) + d_{23}\} = \min\{7\,, 3 + 14\} = 7 \quad ; \quad d_{23} = 14$$

$$T(4) = \min\{T(4)\,, P(2) + d_{24}\} = \min\{8\,, 3 + \infty\} = 8 \quad ; \quad d_{24} = \infty$$

$$T(5) = \min\{T(5)\,, P(2) + d_{25}\} = \min\{\infty\,, 3 + \infty\} = \infty \quad ; \quad d_{25} = \infty$$

$$T(6) = \min\{T(6)\,, P(2) + d_{26}\} = \min\{\infty\,, 3 + 18\} = 21 \quad ; \quad d_{26} = 18$$

لنوجد قيمة $P(3)$ بحيث أن:

$$P(3) = \min\{T(3), T(4), T(5), T(6)\} = \min\{7, 8, \infty, 21\} = 7$$

$$\Rightarrow \boxed{P(3) = 7}$$

لنحسب $P(4)$:⇐

لحساب $P(4)$ نوجد أولاً الكلف من $T(4)$ حتى $T(6)$ بحيث:

$$T(4) = \min\{T(4)\,, P(3) + d_{34}\} = \min\{8\,, 7 + 4\} = 8 \quad ; \quad d_{34} = 4$$

$$T(5) = \min\{T(5)\,, P(3) + d_{35}\} = \min\{\infty\,, 7 + 13\} = 20 \quad ; \quad d_{35} = 13$$

$$T(6) = \min\{T(6)\,, P(3) + d_{36}\} = \min\{21\,, 7 + 15\} = 21 \quad ; \quad d_{36} = 15$$

لنوجد قيمة $P(4)$ بحيث أن:

$$P(4) = \min\{T(4), T(5), T(6)\} = \min\{8, 20, 21\} = 8$$

$$\Rightarrow \boxed{P(4) = 8}$$

لنحسب $P(5)$:⇐

لحساب $P(5)$ نوجد أولاً الكلف $T(5)$, $T(6)$ بحيث:

$$T(5) = \min\{T(5)\,, P(4) + d_{45}\} = \min\{20\,, 8 + 9\} = 17 \quad ; \quad d_{45} = 9$$

$$T(6) = \min\{T(6)\,, P(4) + d_{46}\} = \min\{21\,, 8 + \infty\} = 21 \quad ; \quad d_{46} = \infty$$

لنوجد قيمة $P(5)$ بحيث أن:

$$P(5) = \min\{T(5), T(6)\} = \min\{17, 21\} = 17$$

$$\Rightarrow \boxed{P(5) = 17}$$

لنحسب $P(6)$:$\Leftarrow$

$$T(6) = \min\{T(6)\,, P(5) + d_{56}\} = \min\{21\,, 17 + 24\} = 21 \quad ; \quad d_{56} = 24$$

$$\Rightarrow P(6) = \min\{T(6)\} = 21 \;\Rightarrow\; \boxed{P(6) = 21}$$

وأخيراً نجد أن أقصر مسافة (طريق) بين عقدة البداية v_1 وعقدة النهاية v_6 ناتجة عن المسار التالي:

$$v_1 \xrightarrow{3} v_2 \xrightarrow{18} v_6$$

<u>ثانياً</u> إيجاد أقصر مسافة بين عقدة البداية v_1 وعقدة النهاية v_6 باستخدام **خوارزمية كاسكادا:**

نقوم **أولاً** بإيجاد مصفوفة الأبعاد للبيان المعطى بحيث تعطى عناصرها بالشكل التالي (حسب التعريف) :

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & if \quad i = j \\ w_{ij} & if \quad v_j \text{ إلى } v_i \text{ يوجد طريق من} \\ \infty & if \quad v_j \text{ إلى } v_i \text{ لا يوجد طريق من} \end{cases}$$

بحيث w_{ij} هي وزن القوس من العقدة v_i إلى العقدة v_j , وبالتالي مصفوفة الأبعاد لها الشكل:

$$B = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 & 8 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 14 & \infty & \infty & 18 \\ \infty & \infty & 0 & 4 & 13 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 24 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

ثانياً نقوم بجمع المصفوفة B إلى نفسها وفق عملية الجمع $\oplus$ بحيث تكون العملية $\oplus$ معرفة بالشكل التالي:

$$A \oplus B = C \quad ; \quad c_{ij} = \min\{a_{ik} + b_{kj}\}$$

ونطبق الخوارزمية (كاسكادا) وذلك بتكرار عملية الجمع على المصفوفة B حتى نحصل على المساواة $B^n = B^{n+1}$ وذلك كما يلي:

$$B^2 = B \oplus B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 & 8 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 14 & \infty & \infty & 18 \\ \infty & \infty & 0 & 4 & 13 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 24 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 & 8 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 14 & \infty & \infty & 18 \\ \infty & \infty & 0 & 4 & 13 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 24 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad B^2 = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 & 8 & 17 & 21 \\ \infty & 0 & 14 & 18 & 27 & 18 \\ \infty & \infty & 0 & 4 & 13 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 9 & 33 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 24 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \oplus B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 & 8 & 17 & 21 \\ \infty & 0 & 14 & 18 & 27 & 18 \\ \infty & \infty & 0 & 4 & 13 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 9 & 33 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 24 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 & 8 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 14 & \infty & \infty & 18 \\ \infty & \infty & 0 & 4 & 13 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 24 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad B^3 = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 & 8 & 17 & \boxed{21} \\ \infty & 0 & 14 & 18 & 27 & 18 \\ \infty & \infty & 0 & 4 & 13 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 9 & 33 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 24 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن $B^2 = B^3$ ولأجل ذلك نتوقف عن تطبيق الخوارزمية (عن تطبيق عملية الجمع) ونستنتج من المصفوفة الأخيرة أن أقصر مسافة بين عقدة البداية v_1 وعقدة النهاية v_6 هي 21

(وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها من تطبيق خوارزمية ديجكستر في الطلب السابق)

"انتهى الحل"

انتهى حل الأسئلة

Mohammad Malas