٢٠١٦ ص ١

جامعة دمشق	ميكانيك (2)	الفصل الأول
كلية العلوم	السنة الثالثة رياضيات	2015 -2016

السؤال الأول (40 درجة)

أجب عن الأسئلة التالية :

1. عرف المركز الآني للدوران ، ثمّ عين المركز الآني للدوران هندسياً (ناقش جميع الحالات الممكنة).

2. أثبت أن شعاع التسارع للنقطة M في حركتها المطلقة يعطى بالعلاقة :

$$\vec{\Gamma}_a(M) = \vec{\Gamma}_r + \vec{\Gamma}_e + \vec{\Gamma}_c$$

مع شرح رموز العلاقة .

السؤال الثاني (30 درجة)

يتحرك جسم صلب في الفراغ وفق معادلات الحركة التالية :

$$\psi = t \qquad \theta = t \qquad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$x_0 = \sin t \quad , \quad y_0 = -\cos t \quad , \quad z_0 = 0$$

1- عين مركبات شعاع الدوران الآني على جملة إحداثيات ثابتة .

2- عين معادلات محور الفتل وخطوة اللولب في الحركة اللولبية المماسة لحركة الجسم السابقة ، ثم عين محور الفتل وخطوة اللولب في اللحظة $t = 0$

السؤال الثالث (30 درجة)

$o_1x_1y_1$ جملة احداثيات قائمة ومباشرة وثابتة ، $y\,o\,x$ زاوية متماسكة قياسها $\frac{\pi}{3}$ ، تدور في المستوي الثابت $o_1x_1y_1$ حول رأسها o بسرعة زاوية $w = 2t$ ،ويتحرك رأسها على المستقيم الثابت o_1x_1 بسرعة قيمتها العددية ثابتة وتساوي v ، M نقطة تتحرك بالنسبة للزاوية $y\,o\,x$ إحداثياتها بالنسبة للجملة $y\,o\,x$ هي $(t, 2t^2)$ والمطلوب:

1- تعيين معادلات حركة الزاوية $y\,o\,x$

2 - تعيين مركبات متجه السرع (النسبية ، الجرية ، المطلقة) في الجملة المتماسكة .

3- أوجد القاعدة والمتدحرج ومركز التسارع المعدوم .

تمنياتي لكم بالنجاح

انتهت الأسئلة   أ. هدى الشماط

حل دورة الميكانيك 2 فصل أول

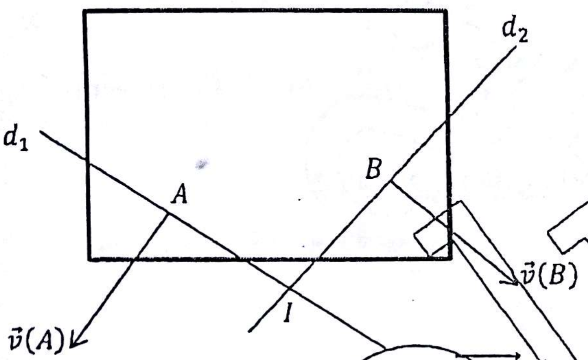
السؤال الأول: أجب عن الأسئلة التالية:

1- عرّف المركز الآني للدوران، ثمّ عيّن المركز الآني للدوران هندسياً (ناقش جمي الحالات الممكنة.)

هو نقطة من المستوي المتحرك تنعدم سرعتها بالنسبة للمستوي الثابت في لحظة معينة ونرمز لها بـ I.

تعيين المركز الآني للدوران: لتكن $A, B \in S$

<u>الحالة الأولى:</u> إذا كان $\vec{v}(A) \nparallel \vec{v}(B)$ (سرعتهما غير متوازية)



لنأخذ المستقيمين d_1 و d_2 بحيث يكون

$\vec{v}(A) \perp d_1 , \vec{v}(B) \perp d_2$ ومنه d_1 لا يوازي d_2

وبالتالي سيتقاطع d_1 م d_2 في نقطة ولتكن I

ولنبرهن أنَّ $\vec{v}(I) = \vec{0}$

* لنأخذ $A_1 \in d_1$ ولنطبق نظرية المساقط على A, A_1

$$\overrightarrow{AA_1}\,\vec{v}(A) = \overrightarrow{AA_1}\,\vec{v}(A_1)$$

وكون $\vec{v}(A) \perp \overrightarrow{AA_1}$ فإنَّ $\overrightarrow{AA_1}\,\vec{v}(A) = \vec{0}$ أي $\overrightarrow{AA_1}\,\vec{v}(A_1) = \vec{0}$ فيكون

$$\vec{v}(A_1) = \vec{0} \quad \text{أو} \quad \left(\vec{v}(A_1) \perp \overrightarrow{AA_1} \Rightarrow \vec{v}(A_1) \perp d_1\right) \dots (1)$$

* وبالمثل تماماً إذا أخذنا $B_1 \in d_2$ وبتطبيق نظرية المساقط على B, B_1 سنجد أنَّ:

$$\vec{v}(B_1) = \vec{0} \quad \text{أو} \quad \left(\vec{v}(B_1) \perp \overrightarrow{BB_1} \Rightarrow \vec{v}(B_1) \perp d_2\right) \dots (2)$$

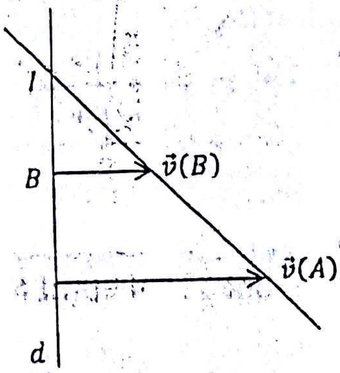
إنَّ I تقاطع d_1 مع d_2 أي I تنتمي لكل منهما وبالتالي من (1) و (2) نجد

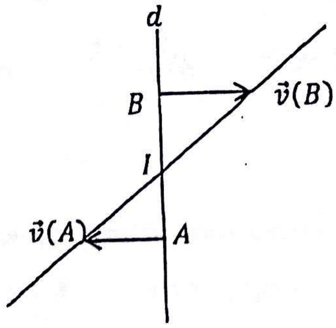
$$\vec{v}(I) = \vec{0} \quad \text{أو} \quad \left(\vec{v}(I) \perp d_1 \quad \text{و} \quad \vec{v}(I) \perp d_2\right)$$

لكن $d_1 \nparallel d_2$ فلا يمكن لـ $\vec{v}(I)$ أن يعامد كلاهما فيكون $\vec{v}(I) = \vec{0}$ مما يبين أنَّ I مركز آني للدوران.

<u>الحالة الثانية:</u> $\vec{v}(A) \parallel \vec{v}(B)$ لكن $\vec{v}(A) \neq \vec{v}(B)$

في هذه الحالة نأخذ d عمودي على $\vec{v}(A)$ و $\vec{v}(B)$ ثم نصل بين نهايتي السرعتين وتكون نقطة تلاقي d مع هذا الوصل هي I ولنبرهن أنَّ I هو المركز الآني للدوران





حيث نكتب حسب تالس

$$\frac{|\overrightarrow{IB}|}{|\overrightarrow{IA}|}=\frac{|\vec{v}(B)|}{|\vec{v}(A)|}\Longrightarrow\frac{|\vec{v}(A)|}{|\overrightarrow{IA}|}=\frac{|\vec{v}(B)|}{|\overrightarrow{IB}|}=|\vec{w}|\Longrightarrow$$ I مركز آني للدوران

الحالة الثالثة: $\vec{v}(A) \parallel \vec{v}(B)$ و $\vec{v}(A)=\vec{v}(B)$

السرع متساوية أي الحركة انسحابية ومنه المستوي المتحرك يتحرك بحركة انسحابية فإذا حاولنا تطبيق طريقة الإنشاء السابقة نلاحظ أنَّ المركز الآني للدوران سيبتعد نحو اللانهاية.

2- أثبت أنَّ شعاع التسارع للنقطة M في حركتها المطلقة يعطي بالعلاقة: (مع شرح الرموز)

$$\overrightarrow{\Gamma_a}(M)=\overrightarrow{\Gamma_r}(M)+\overrightarrow{\Gamma_e}(M)+\overrightarrow{\Gamma_c}(M)$$

نعلم أنَّ علاقة السرعة في الحركة المطلقة هي

$$\overrightarrow{v_a}(M)=\overrightarrow{v_r}(M)+\overrightarrow{v_e}(M)=\overrightarrow{v_r}(M)+\vec{v}(0)+\overrightarrow{w_e}\wedge\overrightarrow{oM}$$

وباشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للزمن نحصل على التسارع المطلق لـ M

$$\overrightarrow{\Gamma_a}(M)=\frac{d\overrightarrow{v_a}(M)}{dt}\Big|_F=\frac{d\overrightarrow{v_r}(M)}{dt}\Big|_F+\frac{d\vec{v}(0)}{dt}\Big|_F+\frac{d\overrightarrow{w_e}}{dt}\Big|_F\wedge\overrightarrow{oM}+\overrightarrow{w_e}\wedge\frac{d\overrightarrow{oM}}{dt}\Big|_F$$

$$\overrightarrow{\Gamma_a}(M)=\frac{d\overrightarrow{v_r}(M)}{dt}\Big|_M+\overrightarrow{w_e}\wedge\overrightarrow{v_r}(M)+\vec{\Gamma}(0)+\vec{\varepsilon}\wedge\overrightarrow{oM}+\overrightarrow{w_e}\wedge\left(\frac{d\overrightarrow{oM}}{dt}\Big|_M+\overrightarrow{w_e}\wedge\overrightarrow{oM}\right)$$

$$\overrightarrow{\Gamma_a}(M)=\overrightarrow{\Gamma_r}(M)+\overrightarrow{w_e}\wedge\overrightarrow{v_r}(M)+\vec{\Gamma}(0)+\vec{\varepsilon}\wedge\overrightarrow{oM}+\overrightarrow{w_e}\wedge\frac{d\overrightarrow{oM}}{dt}\Big|_M+\overrightarrow{w_e}\wedge\left(\overrightarrow{w_e}\wedge\overrightarrow{oM}\right)$$

$$\overrightarrow{\Gamma_a}(M)=\overrightarrow{\Gamma_r}(M)+\vec{\Gamma}(0)+\vec{\varepsilon}\wedge\overrightarrow{oM}+\overrightarrow{w_e}\wedge\left(\overrightarrow{w_e}\wedge\overrightarrow{oM}\right)+\overrightarrow{w_e}\wedge\overrightarrow{v_r}(M)+\overrightarrow{w_e}\wedge\frac{d\overrightarrow{oM}}{dt}\Big|_M$$

$$\overrightarrow{\Gamma_a}(M)=\overrightarrow{\Gamma_r}(M)+\vec{\Gamma}(0)+\vec{\varepsilon}\wedge\overrightarrow{oM}-\overrightarrow{w_e}^2\,\overrightarrow{oM}+2\left(\overrightarrow{w_e}\wedge\overrightarrow{v_r}(M)\right)$$

حيث $\overrightarrow{\Gamma_r}(M)=\frac{d\overrightarrow{v_r}(M)}{dt}\Big|_F$ التسارع النسبي لـ M و $\overrightarrow{\Gamma_c}(M)=2\left(\overrightarrow{w_e}\wedge\overrightarrow{v_r}(M)\right)$ التسارع المتمم لـ M و $\overrightarrow{\Gamma_e}(M)=\vec{\Gamma}(0)+\vec{\varepsilon}\wedge\overrightarrow{oM}-\overrightarrow{w_e}^2\,\overrightarrow{oM}$ التسارع الجري لـ M فيكون

$$\overrightarrow{\Gamma_a}(M)=\overrightarrow{\Gamma_r}(M)+\overrightarrow{\Gamma_e}(M)+\overrightarrow{\Gamma_c}(M)$$

السؤال الثاني: يتحرك جسم صلب في الفراغ وفق المعادلات

$$\psi = t \ , \ \theta = t \ , \ \varphi = \frac{\pi}{2} \ , \ x_0 = \sin t \ , \ y_0 = -\cos t \ , \ z_0 = 0$$

1- عيّن مركبات شعاع الدوران الآني على جملة إحداثيات ثابتة.

2- عيّن معادلات محور الفتل وخطوة اللولب في الحركة اللولبية المماسة لحركة الجسم السابقة ثم عيّن محور الفتل وخطوة اللولب في اللحظة $t = 0$.

الحل: 1- تعيين $\vec{\omega}$ حيث $\vec{\omega} = \psi'\overrightarrow{k_1} + \theta'\vec{u} + \varphi'\vec{k}$ نلجأ إلى مصفوفات التحويل للانتقال بين أشعة الواحدة (هدفنا الإسقاط على أشعة الواحدة للجملة الثابتة)

D_θ	$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\vec{k}$
$\vec{u}$	1	0	0
$\overrightarrow{v_1}$	0	$\cos\theta$	$-\sin\theta$
$\overrightarrow{k_1}$	0	$\sin\theta$	$\cos\theta$

D_ψ	$\vec{u}$	$\overrightarrow{v_1}$	$\overrightarrow{k_1}$
$\overrightarrow{i_1}$	$\cos\psi$	$-\sin\psi$	0
$\overrightarrow{j_1}$	$\sin\psi$	$\cos\psi$	0
$\overrightarrow{k_1}$	0	0	1

D_φ	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\overrightarrow{k_1}$
$\vec{u}$	$\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	0
$\vec{v}$	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
$\vec{k}$	0	0	1

حيث لدينا $\varphi' = 0$ و $\psi' = 1$ و $\theta = 1$ ومنه

$$\vec{\omega} = \overrightarrow{k_1} + \vec{u}$$

من D_ψ نجد أنّ: $\vec{u} = \cos\psi\,\overrightarrow{i_1} + \sin\psi\,\overrightarrow{j_1}$ أي $\vec{u} = \cos t\,\overrightarrow{i_1} + \sin t\,\overrightarrow{j_1}$ وبالتعويض في $\vec{\omega}$ نجد أنّ $\vec{\omega} = \cos t\,\overrightarrow{i_1} + \sin t\,\overrightarrow{j_1} + \overrightarrow{k_1}$.

$$\forall N \in \Delta \ ; \ \vec{V}(N) \parallel \vec{\omega}$$

$$\vec{V}(N) = \vec{V}(0) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{ON} = (x_0', y_0', z_0') + \begin{vmatrix} \overrightarrow{i_1} & \overrightarrow{j_1} & \overrightarrow{k_1} \\ \cos t & \sin t & 1 \\ x_N - x_0 & y_n - y_0 & z_N - z_0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V}(N) = \vec{V}(0) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{ON} = (\cos t, \sin t, 0) + \begin{vmatrix} \overrightarrow{i_1} & \overrightarrow{j_1} & \overrightarrow{k_1} \\ \cos t & \sin t & 1 \\ x_N - \sin t & y_n + \cos t & z_N \end{vmatrix}$$

$$\vec{V}(N)=\vec{V}(0)+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{ON}=(\cos t,\sin t,0)+(z_N\sin t-y_N-\cos t,$$
$$-z_N\cos t+x_N-\sin t,y_N\cos t+\cos^2 t-x_N\sin t+\sin^2 t)$$
$$\vec{V}(N)=(z_N\sin t-y_N,x_N-z_n\cos t,y_N\cos t+\cos^2 t-x_N\sin t+\sin^2 t)$$

وبالتالي يمكن الحصول على محور الفتل من العلاقة

$$\frac{z_n\sin t-y_n}{\cos t}=\frac{x_N-z_n\cos t}{\sin t}=\frac{y_n\cos t+\cos^2 t-x_n\sin t+\sin^2 t}{1}$$

وعندما $t=0$ تصبح العلاقة بالشكل

$$\frac{-y_n}{1}=\frac{x_N-z_n}{0}=\frac{y_n+1}{1}$$

وبالتالي معادلات محور الفتل تكون عندما $t=0$

$$-y_n=y_n+1\quad,\qquad x_N-z_n=0$$

أي
$$z_n=x_N\ ,\ y_n=-\frac{1}{2}$$

وخطوة اللولب تُعطى بالعلاقة

$$b=\frac{\vec{V}(0)\cdot\vec{\omega}}{\omega^2}=\frac{(\cos t,\sin t,0)\cdot(\cos t,\sin t,1)}{2}=\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{2}=\frac{1}{2}$$

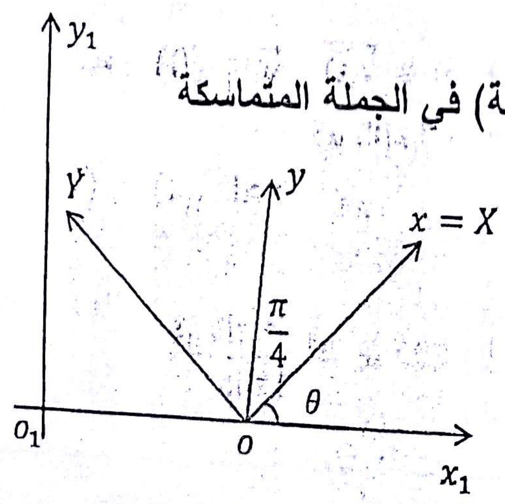
وعندما يكون $t=0$ فإنّ $b=\frac{1}{2}$.

السؤال الثالث: $o_1x_1y_1$ جملة إحداثيات قائمة ومباشرة وثابتة $x\,o\,y$ زاوية متماسكة قياسها $\frac{\pi}{3}$. تدور في المستوي الثابت $o_1x_1y_1$ حول رأسها o بسرعة زاوية $w=2t$ ويتحرك رأسها على المستقيم الثابت o_1x_1 بسرعة قيمتها العددية ثابتة وتساوي v، M نقطة تتحرك بالنسبة للزاوية $x\,o\,y$ إحداثياتها بالنسبة للجملة $x\,o\,y$ هي $(t,2t^2)$ والمطلوب:

1- تعيين معادلات حركة الزاوية $x\,o\,y$.

2- تعيين مركبات متجه السرع (النسبية ، الجرية ، المطلقة) في الجملة المتماسكة

3- أوجد القاعدة والمتدحرج ومركز التسارع المعدوم.



الحل: 1- الحركة مستوية أي يجب تعيين θ و (x_0,y_0)

$$x_0=\int vdt=vt+c$$
$$t=0\,,x_0=0\Rightarrow c=0$$

وبالتالي يكون $x_0 = vt$ ... (1) وأيضاً $y_0 = 0$ ... (2)

$$\theta' = w = 2t \Rightarrow \theta = t^2 + \theta_0$$
$$t = 0\ , \qquad \theta = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0$$

أي إنَّ $\theta = t^2$ ... (3) حيث θ الزاوية بين ox و ox_1

2- OXY جملة متماسكة بحيث ox ينطبق على OX

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = X\vec{I} + y\left(\cos\frac{\pi}{3}\vec{I} + \sin\frac{\pi}{3}\vec{J}\right) = \left(X + \frac{1}{2}Y\right)\vec{I} + \frac{\sqrt{3}}{2}Y\vec{J}$$

ومنه تكون السرعة النسبية

$$\vec{V_r}(M) = \left(X' + \frac{1}{2}Y'\right)\vec{I} + \frac{\sqrt{3}}{2}Y'\vec{J}$$

والسرعة الجرية

$$\vec{V_e}(M) = \vec{V}(0) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = v\vec{\imath_1} + \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & 2t \\ X + \frac{1}{2}Y & \frac{\sqrt{3}}{2}Y & 0 \end{vmatrix}$$

$$i_1 = \cos\theta\,\vec{I} - \sin\theta\,\vec{J} = \cos t^2\,\vec{I} - \sin t^2\,\vec{J}$$

$$\vec{V_e}(M) = v\cos t^2\vec{I} - v\sin t^2\vec{J} - \sqrt{3}tY\vec{I} + 2t\left(X + \frac{1}{2}Y\right)\vec{J}$$

$$= \left(v\cos t^2 - \sqrt{3}tY\right)\vec{I} + \left(-v\sin t^2 + 2t\left(X + \frac{1}{2}Y\right)\right)\vec{J}$$

$$V_{a_x}(M) = X' + \frac{1}{2}Y' + v\cos t^2 - \sqrt{3}tY$$

$$V_{a_y}(M) = \frac{\sqrt{3}}{2}Y' - v\sin t^2 + 2t\left(X + \frac{1}{2}Y\right)$$

وهي مركبات السرعة المطلقة.

3-

$$\vec{V}(0) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IO}$$

$I(X_1(I), Y_1(I))$ في الجملة الثابتة

$$v\vec{\imath_1} = \begin{vmatrix} \vec{\imath_1} & \vec{\jmath_1} & \vec{k_1} \\ 0 & 0 & 2t \\ vt - X_1 & -Y_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(1) \ldots v = 2tY_1 \quad , \quad (2) \ldots 0 = 2t(vt - X_1)$$

ومنه يكون $vt = X_1$ وبالتالي $t = \frac{X_1}{v}$ نعوض في (1) فيكون

$$v = \frac{2X_1}{v} Y_1 \Rightarrow X_1 \cdot Y_1 = \frac{v^2}{2}$$

القاعدة هي عبارة عن قطع زائد متساوي الساقين.

$I(X(I), Y(I))$ في الجملة المتماسكة

$$\vec{v}(0) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IO}$$

$$v \cos t^2 \vec{I} - v \sin t^2 \vec{J} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & 2t \\ -X_I & -Y_I & 0 \end{vmatrix}$$

$$v \cos t^2 = 2tY_I \quad , \quad -v \sin t^2 = -2tX_I$$

وهي المعادلات الوسيطية للمتدحرج

O مركز التسارع المعدوم وهو نقطة من المتماسكة ينعدم تسارعها بالنسبة للجملة الثابتة.

انتهى الحل ....

جامعة دمشق ٢٠١٦ ح ح ميكانيك (2) الفصل الثاني

كلية العلوم السنة الثالثة رياضيات 2015 -2016

السؤال الأول : (35 درجة)

أجب عن الأسئلة التالية :

1- عرف الحركة اللولبية للجسم الصلب ، ثم أثبت أن شعاع السرعة لنقطة من جسم صلب يتحرك بحركة لولبية يعطى بالعلاقة : $\overline{v}(M)=b\overline{w}+\overline{w}\wedge\overline{oM}$ (مع شرح رموز العلاقة)

2- أثبت أن شعاع الدوران الآني في الحركة العامة للجسم الصلب لا يتأثر باختيار القطب .

السؤال الثاني : (30 درجة)

يتحرك جسم صلب S في الفراغ بحيث تبقى النقطة o منه ثابتة ، $oxyz$ جملة محاور متعامدة ومباشرة متماسكة مع S.
فإذا كانت مركبات متجه السرعة للنقطة $M_1(0,0,2)$ على $oxyz$ هي $\overline{V}(M_1)=(t,2t^2,0)$ و متجه السرعة للنقطة $M_2(0,1,2)$ بالنسبة للجملة $oxyz$ هي $\ddot{V}(M_1)=(-2,2,-1)$.عين شعاع الدوران الآني وشعاع التسارع الزاوي الآني والمعادلة الديكارتية للمتدحرج .

السؤال الثالث : (35 درجة)

نصف دائرة ثابتة مركزها o نصف قطرها 2 ، قطرها الأفقي cod ، AB قضيب طوله 6 تتحرك نهايته A على محيط نصف الدائرة بسرعة ثابتة قيمتها $(v(A)=4)$ ، و يستند القضيب على حافة c للدائرة والمطلوب :

1- تعيين المركز الآني لدوران القضيب AB والقاعدة والمتدحرج هندسياً.

2- تعيين معادلات الحركة للقضيب AB .

3- تعيين سرعة وتسارع النقطة B (نهاية القضيب) في الجملة الثابتة.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح

أ. هلال الشماط
جامعة دمشق - كلية العلوم
ح --
الامتحانات

- ١١ -

- ٣٦ -

حل دورة الميكانيك 2 الفصل الثاني

السؤال الأول: أجب عن الأسئلة التالية:

1- عرّف الحركة اللولبية للجسم الصلب, ثمّ أثبت أنّ شعاع السرعة لنقطة من جسم صلب يتحرك بحركة لولبية يعطى بالعلاقة: $\vec{v}(M) = b\vec{w} + \vec{w} \wedge \overrightarrow{oM}$ **(مع شرح رموز العلاقة)**

تعريف الحركة اللولبية: هي حركة جسم صلب ينسحب فيه مستقيم محدد على حامله بحيث ترسم كل نقطة فيه لولب دائري ويكون هنا لدينا حركتان انسحابية ودورانية.

تعيين شعاع السرعة: لتكن M نقطة ما من جسم صلب يتحرك بحركة لولبية وبفرض M_1 مسقط M على محور الدوران و M_2 مسقط M على المستوي عندئذٍ:

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(M_1) + \vec{v}(M_2) = \underbrace{s'\vec{u}}_{\text{حركة انسحابية}} + \underbrace{\vec{w} \wedge \overrightarrow{o_1M_2}}_{\text{حركة دورانية}}$$

$$\vec{v}(M) = b\theta'\vec{u} + \vec{w} \wedge (\overrightarrow{o_1M} + \overrightarrow{MM_2}) = b\vec{w} + \vec{w} \wedge (\overrightarrow{o_1M}) + \vec{w} \wedge \overrightarrow{MM_2}$$

ولكن لدينا $\vec{w}$ يوازي $\overrightarrow{MM_2}$ أي $\vec{0} = \vec{w} \wedge \overrightarrow{MM_2}$ ومنه محور الدوران نجد:

$$\vec{v}(M) = b\vec{w} + \vec{w} \wedge \overrightarrow{o_1M}$$

حيث b الخطوة المختزلة للولب و θ الزاوية التي يصنعها اللولب خلال الدوران و $\overrightarrow{oM}$ شعاع الموضع و $\vec{w}$ شعاع الدوران.

2- أثبت أنّ شعاع الدوران الآني في الحركة العامة للجسم الصلب لا يتأثر باختيار القطب.

الإثبات: ليكن S جسم صلب وبفرض أنّ الحركة عامة وليكن A, B نقطتان من الجسم S ولنفترض أنّ كلاً منهما قطباً للحركة, ولتكن M نقطة كيفية من الجسم الصلب S عندئذٍ:

تُعطى سرعة النقطة M باعتبار A قطب للحركة بالعلاقة: $\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \overrightarrow{w_A} \wedge \overrightarrow{AM}$

تُعطى سرعة النقطة M باعتبار B قطب للحركة بالعلاقة: $\vec{v}(M) = \vec{v}(B) + \overrightarrow{w_B} \wedge \overrightarrow{BM}$

وبالتالي فإنّ $(*)......\vec{v}(A) + \overrightarrow{w_A} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{v}(B) + \overrightarrow{w_B} \wedge \overrightarrow{BM}$

وتُعطى سرعة النقطة B من الجسم الصلب باعتبار A قطب للحركة بالعلاقة:

$$\vec{v}(B) = \vec{v}(A) + \overrightarrow{w_A} \wedge \overrightarrow{AB}$$

نعوض سرعة B في العلاقة $(*)$ فيكون

$$\vec{v}(A) + \overrightarrow{w_A} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{v}(A) + \overrightarrow{w_A} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{w_B} \wedge \overrightarrow{BM}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{w_A} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{w_A} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{w_B} \wedge \overrightarrow{BM}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{w_A} \wedge \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{w_A} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{w_B} \wedge \overrightarrow{BM}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{w_A} \wedge \left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{w_B} \wedge \overrightarrow{BM}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{w_A} \wedge \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{(-AB)}\right) = \overrightarrow{w_B} \wedge \overrightarrow{BM}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{w_A} \wedge \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA}\right) = \overrightarrow{w_B} \wedge \overrightarrow{BM}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{w_A} \wedge \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{w_B} \wedge \overrightarrow{BM}$$

وبما أنَّ M نقطية كيفية من S فيمكن اختصار $\overrightarrow{BM}$ من الجداء الخارجي ومنه $\overrightarrow{w_A} = \overrightarrow{w_B} = \vec{w}$.

السؤال الثاني: يتحرك جسم صلب S في الفراغ بحيث تبقى النقطة O منه ثابتة، $oxyz$ جملة محاور متعامدة ومباشرة ومتماسكة مع S فإذا كانت مركبات متجه السرعة للنقطة $M_1(0,0,2)$ على $oxyz$ هي $\vec{V}(M_1) = (t, 2t^2, 0)$ ومتجه سرعة النقطة $M_2(0,1,2)$ بالنسبة $oxyz$ هي $\vec{V}(M_2) = (-2, 2, -1)$.

عيّن شعاع الدوران الآني وشعاع التسارع الزاوي الآني والمعادلة الديكارتية للمتدحرج.

الحل: تعيين شعاع الدوران $\vec{w}$: بفرض أنَّ $\vec{w} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$

إنَّ سرعة النقطة M_1 تُعطى بالعلاقة

$$\vec{V}(M_1) = \vec{w} \wedge \overrightarrow{oM_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2q\vec{i} - 2p\vec{j} + 0\vec{k}$$

ولدينا من الفرض $\vec{V}(M_1) = t\vec{i} + 2t^2\vec{j} + 0\vec{k}$ وبالمطابقة نحصل على

$$\begin{Bmatrix} 2q = t \\ -2p = 2t^2 \end{Bmatrix} \Rightarrow q = \frac{t}{2} \ , \ p = -t^2$$

وسرعة النقطة M_2 تُعطى بالعلاقة

$$\vec{V}(M_2) = \vec{w} \wedge \overrightarrow{oM_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -t^2 & \frac{t}{2} & r \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (t-r)\vec{i} + 2t^2\vec{j} - t^2\vec{k}$$

ولدينا من الفرض $\vec{V}(M_1) = -2\vec{i} + 2\vec{j} - 1\vec{k}$ وبالمطابقة نحصل على

$$\begin{Bmatrix} t - r = -2 \\ 2t^2 = 2 \\ -t^2 = -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow r = t + 2$$

ومما سبق نجد أنّ $\vec{w} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k} = -t^2\vec{i} + \frac{t}{2}\vec{j} + (t+2)\vec{k}$

وبالاشتقاق لشعاع التسارع الزاوي نحصل على التسارع الزاوي وهو

$$\vec{\varepsilon} = -2t\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + 2\vec{k}$$

تعيين المدحرج: أياً كانت $M(x,y,z) \in \Delta$ فإنّ معادلات المتدحرج تعطى بالعلاقة:

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} \Longrightarrow \frac{x}{-t^2} = \frac{y}{\frac{t}{2}} = \frac{z}{t+2}$$

$$\Longrightarrow -\frac{x}{t^2} = \frac{2y}{t} = \frac{z}{t+2}$$

ونحصل على $xt = 2yt^2 \;,\; 2y(t+2) = zt$ وللحصول على المعادلة الديكارتية نقوم بحذف الزمن

$$xt = 2yt^2 \Longrightarrow x = 2yt \Longrightarrow t = \frac{x}{2y}$$

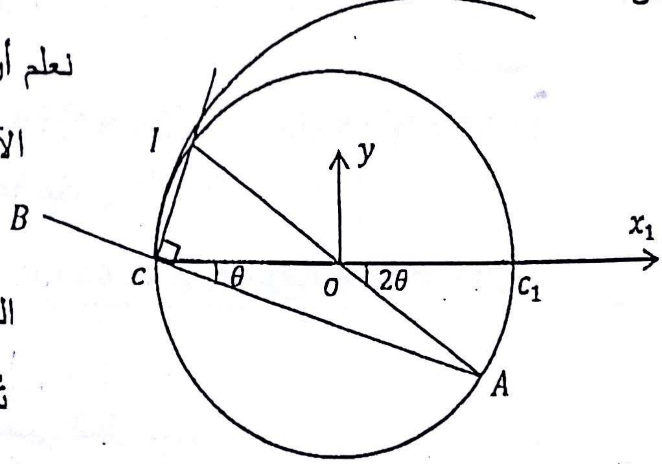
نعوض في المعادلة الثانية فيكون $2y\left(\frac{x}{2y}+2\right) = z\left(\frac{x}{2y}\right)$ ومنه $x + 4y = \frac{zx}{2y}$.

السؤال الثالث: نصف دائرة ثابتة مركزها O ونصف قطرها 2 قطرها الأفقي coc_1، AB قضيب طوله 6 تتحرك نهايته A على محيط نصف الدائرة بسرعة ثابتة قمتها $v(A) = 4$ ويستند القضيب على حافة c للدائرة والمطلوب: 1- تعيين المركز الآني لدوران القضيب AB والقاعدة والمتدحرج هندسياً.

2- تعيين معادلات الحركة للقضيب

3- تعيين سرعة وتسارع النقطة B (نهاية القضيب) في الجملة الثابتة.

الحل:



نعلم أنّ سرعة A تُحمل على مماس الدائرة لذا فإنّ المركز الآني للدوران يقع على العمود المماس في A أي على نصف القطر OA، ولما كان المستقيم يستند على الحافة c فسرعة النقطة المنطبقة على c من القضيب تُحمل على القضيب أي أنّ المركز الآني للدوران يقع على العمود على القضيب في النقطة c فنقطة تقاطع هذين العمودين هي المركز الآني للدوران.

تعيين القاعدة والمتدحرج: إنَّ الزاوية $\angle ACI$ قائمة أي AI هو قطر الدائرة الثابتة التي مركزها O ونصف قطرها 2 فهي القاعدة. كما أنَّ بُعد I عن النقطة A الثابتة بالنسبة للقضيب يساوي 4 ثابت مما يدل على أنَّ المتدحرج دائرة مركزها A ونصف قطرها 4 وتتم حركة القضيب بالتالي بتدحرج الدائرة الكبيرة $C(A,4)$ خارج الصغيرة $C(O,2)$ دون انزلاق.

الطلب الثاني: إنَّ حركة القضيب مستوية فهي تتعين بإحداثيات قطب نختاره A وزاوية يصنعها مستقيم متماسك مع القضيب (هو نفسه القضيب) مع مستقيم ثابت وليكن القطر coc_1 فتكون معادلات الحركة هي x_A, y_A, θ .

لدينا من الفرض القيمة العددية لسرعة A على محيط الدائرة هي $v(A) = 4$ ومن جهة أُخرى هي $v(A) = 2w_1$ حيث $w_1 = -(2\theta)'$ أي إنَّ:

$$4 = 2(-2\theta') = -4\theta' \Rightarrow \theta' = -1 \Rightarrow \theta = -t + \theta_0$$

وبفرض كانت $\theta = 0$ في لحظة البدء فيكون $t = 0$.$\theta = -t$

نقوم بإسقاط إحداثيات A لى المحاور الثابتة oxy فنجد $y_A = 2\sin 2\theta \quad , \quad x_A = 2\cos 2\theta$

ومنه يكون $y_A = 2\sin -2t = -2\sin 2t$, $x_A = 2\cos -2t = 2\cos 2t$ أي معادلات الحركة

$$\theta = -t \quad , \quad x_A = 2\cos 2t \quad , \quad y_A = -2\sin 2t$$

الطلب الثالث:

$$\vec{V}(B) = \vec{V}(A) + \vec{w} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{V}(B) = (-4\sin 2t, -4\cos 2t, 0) + (-1\vec{k}) \times (-2l\cos t, 2l\sin t, 0)$$

$$\vec{V}(B) = (-4\sin 2t, -4\cos 2t, 0) + (-1\vec{k}) \times (-6\cos t, 6\sin t, 0)$$

وبالإصلاح نجد:

$$\vec{V}(B) = (-4\sin 2t + 6\sin t)\vec{\imath} + (-4\cos 2t + 6\cos t)\vec{\jmath}$$

أما التسارع فنحصل عليه باشتقاق علاقة السرعة فيكون

$$\vec{\Gamma}(B) = (-8\cos 2t + 6\cos t)\vec{\imath} + (8\sin 2t - 6\sin t)\vec{\jmath}$$

انتهى الحل ....

٢٠١٦ تكميلي

جامعة دمشق
كلية العلوم

ميكانيك (2)
ثالثة رياضيات

الدورة التكميلية
2015-2016

السؤال الأول (35 درجة):

أجب عن الأسئلة التالية :

1- أثبت أن شعاع الدوران الآني في الحركة العامة لجسم صلب لا يتأثر باختيار القطب .

2- اكتب عبارة شعاع السرعة وعبارة شعاع التسارع لكل من الحالات التالية مع شرح الرموز

أ-الحركة الدورانية لجسم صلب حول محور ثابت
ب - الحركة الدورانية لجسم صلب حول نقطة ثابتة
جـ- الحركة المستوية لجسم صلب
د - الحركة المحصلة لنقطة مادية

السؤال الثاني (30 درجة)

قضيب AB طوله $2l$ يتحرك في المستوي x_1oy_1 بحيث تتحرك النقطة A على ox_1 بسرعة قيمتها $v = cost$ ويدور AB حول A في المستوي x_1oy_1 بسرعة زاوية $w = 1$.

- عين معادلات حركة AB في المستوي وعين سرعة النقطة B وتسارعها في الجملة الثابتة.
- أوجد بالطريقة التحليلية معادلات القاعدة والمتدحرج للقضيب AB .

السؤال الثالث 35 (درجة)

صفيحة بشكل مربع $OABC$ طول ضلعه $L = 1$ تدور حول رأسها الثابت O بحيث يبقى ضلعها OA ملازماً للمستوي الثابت ox_1y_1 ، وبفرض أن سرعة النقطة A ثابتة قيمتها $(v(A) = 1)$ ، والقيمة العددية لسرعة B تتعين من العلاقة : $v^2(B) = 1 + \cos^2\theta$. والمطلوب :

1- عين مركبات شعاع الدوران الآني على المحاور المتماسكة مع الصفيحة ، ومعادلات حركة هذه الصفيحة.

2- بفرض M نقطة تتحرك على OC بسرعة ثابتة قيمتها v ، عين السرعة المطلقة للنقطة M ، علماً أنها كانت في لحظة البدء في النقطة O .

انتهت الأسئلة

أ. هدى الشوملي ... ٢٠١٦ ... 2

- ١٢ - اذار

حل دورة الميكانيك 2 التكميلي

السؤال الأول: 1− محلول في دورة 2016 الفصل الثاني.

2− اكتب عبارة شعاع السرعة وعبارة شعاع التسارع لكل من الحالات التالية مع شرح الرموز:

أ− الحركة الدورانية لجسم صلب حول محور ثابت. ج− الحركة المستوية لجسم صلب

ب− الحركة الدورانية لجسم صلب حول نقطة ثابتة. د− الحركة المحصلة لنقطة مادية.

الحل: أ− شعاع السرعة هو $\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$

شعاع التسارع هو $\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}(M)$

حيث أنّ $\vec{\omega}$ شعاع الدوران، ε شعاع التسارع الزاوي ، $\overrightarrow{OM}$ شعاع الموضع للنقطة M.

ب− شعاع السرعة هو $\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$

شعاع التسارع هو $\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}(M)$

ج− شعاع السرعة هو $\vec{V}(M) = \vec{V}(0) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$

شعاع التسارع هو $\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}(M)$

حيث O قطب الحركة و $\vec{V}(O)$ و $\vec{\Gamma}(O)$ سرعة وتسارع القطب على الترتيب

د− شعاع السرعة هو $\vec{V_a}(M) = \vec{V_r}(M) + \vec{V_e}(M)$

حيث $\vec{V_r}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}|_M$ السرعة النسبية لـ M و $\vec{V_e}(M) = \vec{V}(O) + \vec{\omega_e} \wedge \overrightarrow{OM}$ السرعة الجرية

شعاع التسارع هو $\vec{\Gamma}_a(M) = \vec{\Gamma}_r(M) + \vec{\Gamma}_e(M) + \vec{\Gamma}_c(M)$

حيث $\vec{\Gamma}_r(M) = \frac{d\vec{V_r}(M)}{dt}|_M$ التسارع النسبي لـ M و التسارع الجري هو

$\vec{\Gamma}_e(M) = \Gamma(O) + \varepsilon \wedge \overrightarrow{OM} - \omega^2 \cdot \overrightarrow{OM}$

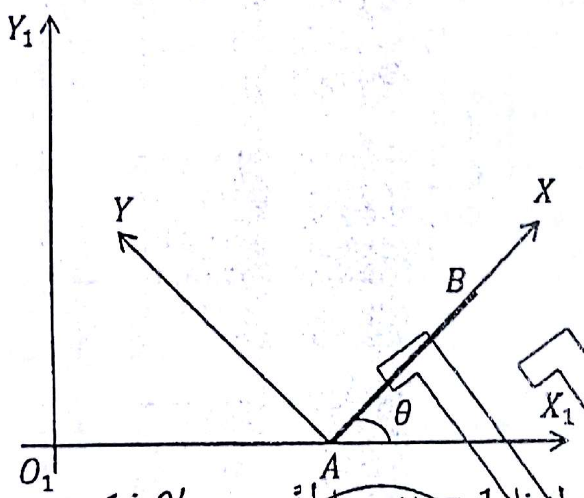
و $\vec{\Gamma}_c(M) = 2\vec{\omega_e} \wedge \vec{V_r}(M)$ تسارع متمم.

السؤال الثاني: قضيب AB طوله $2l$ يتحرك في المستوي x_1oy_1 بحيث تتحرك النقطة A على ox_1 بسرعة قيمتها $v = \cos t$ ويدور AB حول A في المتسوي x_1oy_1 بسرعة زاوية $w = 1$. والمطلوب:

1- عيّن معادلات حركة AB في المستوي وعيّن سرعة النقطة B وتسارعها في الجملة الثابتة

2- أوجد بالطريقة التحليلية معادلات القاعدة والمتدحرج للقضيب AB.

الحل: 1- نختار النقطة $A(x_A, y_A)$ قطباً للحركة ونختار θ الزاوية بين المحور ox_1 والقضيب AB عندئذٍ:



نلاحظ أنّ $y_A = 0$ ولدينا من الفرض

$$|\vec{V}(A)| = \cos t$$

أي $V_x(A) = \cos t$ وبالتالي يكون

$$x_A = \int \cos t = \sin t + c$$

وفي لحظة البدء عندما كان $t = 0$ فإنّ $c = 0$

وبالتالي يكون $x_A = \sin t$ والآن لنقم بحساب θ حيث لدينا $\omega = 1$ وبما أنّ $\omega = \theta'$ فيكون

$$\theta = \int \omega dt = \int 1\, dt = t + \theta_0$$

عندما كان $t = 0$ فإنّ $\theta_0 = 0$ فيكون $\theta = t$ ومما سبق نجد أنّ معادلات الحركة هي

$$x_A = \sin t \quad , \quad y_A = 0 \quad , \quad \theta = t$$

لحساب السرعة والتسارع للنقطة B نقوم بإيجاد مسار النقطة B

$$\overrightarrow{O_1B} = \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{AB} = (x_A, y_A) + \overrightarrow{AB} = (\sin t\,, 0) + (2l\cos\theta\,, 2l\sin\theta)$$

$$\overrightarrow{O_1B} = (\sin t + 2l\cos t\,, 2l\sin t)$$

ومن ثمّ باشتقاق هذه العلاقة نحصل على سرعة B

$$\vec{V}(B) = (\cos t - 2l\sin t\,, 2l\cos t)$$

وبالاشتقاق مرة أخرى نحصل على التسارع

$$\vec{\Gamma}(B) = (-\sin t - 2l\cos t\,, -2l\sin t)$$

2- بفرض إحداثيات المركز الآني للدوران في الجملة الثابتة $I(x_1, y_1)$ عندئذٍ:

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{V}(A)}{\omega^2} \Rightarrow (x_1 - \sin t\,, y_1) = \frac{1}{1}\begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos t & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, \cos t)$$

وهي تمثل المعادلات الوسيطية للقاعدة.

بفرض إحداثيات المركز الآني للدوران في الجملة المتماسكة هي $I(x(I), y(I))$ عندئذٍ:

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{V}(A)}{\omega^2}$$

هنا يجب إسقاط سرعة النقطة A من الجملة الثابتة إلى الجملة المتماسكة:

$$\vec{V}(A) = \cos t\,\vec{i}_1 + 0\vec{j}_1 = \cos t\,(\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j}) = \cos t\,(\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j})$$

$$\overrightarrow{AI} = (x(I), y(I)) = \frac{1}{\omega^2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ \cos^2 t & -\sin t\cos t & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos^2 t & -\sin t\cos t & 0 \end{vmatrix}$$

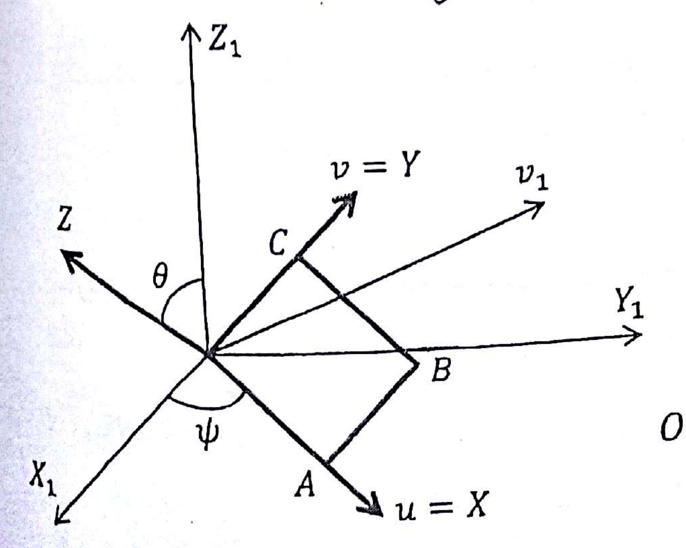
$$\overrightarrow{AI} = \sin t\cos t\,\vec{i} + \cos^2 t\,\vec{j} = (\sin t\cos t\,, \cos^2 t)$$

وهي تمثل المعادلات الوسيطية للمتدحرج.

السؤال الثالث: صفيحة بشكل مربع $OABC$ طول ضلعه $L = 1$ تدور حول رأسها الثابت O بحيث يبقى ضلعها OA ملازما للمستوي الثابت ox_1y_1 وبفرض أنَّ سرعة النقطة A ثابتة قيمتها $|v(A)| = 1$ والقيمة العددية لسرعة B تتعين من العلاقة: $v^2(B) = 1 + \cos^2\theta$

والمطلوب: 1- عيّن مركبات شعاع الدوران الآني على المحاور المتماسكة مع الصفيحة، ومعادلات حركة هذه الصفيحة.

2- بفرض M نقطة تتحرك على OC بسرعة ثابتة قيمتها v ، عيّن السرعة المطلقة للنقطة M علماً أنها كانت في لحظة البدء في النقطة O.



الحل: بما أنَّ الحركة دورانية حول نقطة ثابتة فإنَّ وسطاء الحركة هي زوايا أولر ψ, θ, φ وبما أنَّ OA ملازم للمستوي الثابت OX_1Y_1 فإنَّ الفصل المشترك Ou سوف ينطبق على المحور OX ويكون $\varphi = 0$ وذلك لأنَّ الزاوية φ تقوم بتحريك المستقيم OA الملازم للمستوي فرضاً

1- يُعطى شعاع الدوران بشكل عام بالعلاقة $\vec{\omega} = \psi'\overrightarrow{k_1} + \theta'\vec{u} + \varphi'\vec{k}$

وبتعويض المعطيات نجد أنّ: $\vec{\omega} = \psi'\overrightarrow{k_1} + \theta'\vec{\imath} + 0\vec{k}$

ولنوجد k_1 من مصفوفة التحويل التالية:

D_θ	$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\vec{k}$
$\vec{u}$	1	0	0
$\overrightarrow{v_1}$	0	$\cos\theta$	$-\sin\theta$
$\overrightarrow{k_1}$	0	$\sin\theta$	$\cos\theta$

حيث نجد أنّ: $\overrightarrow{k_1} = \sin\theta\,\vec{v} + \cos\theta\,\vec{k} = \sin\theta\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}$

ومنه يكون $\vec{\omega} = \psi'(\sin\theta\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}) + \theta'\vec{\imath}$

$$\vec{\omega} = \theta'\vec{\imath} + \psi'\sin\theta\,\vec{\jmath} + \psi'\cos\theta\,\vec{k}$$

ولتعيين معادلات الحركة يجب تعيين زوايا أولر حيث لدينا أولاً أنّ $\varphi = 0$

نلاحظ أنّ إحداثيات النقاط A, B, C في الجملة المتماسكة هي كمايلي:

$$A(1,0,0) \quad , \quad B(1,1,0) \quad , \quad C(0,1,0)$$

من علاقة سرعة النقطة A نجد:

$$\vec{V}(A) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \theta' & \psi'\sin\theta & \psi'\cos\theta \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \psi'\cos\theta\,\vec{\jmath} + \psi'\sin\theta\,\vec{k}$$

حسب الفرض لدينا $|\vec{V}(A)| = 1$ ومن جهة أخرى

$$|\vec{V}(A)| = \sqrt{\psi'^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \psi'$$

وبأخذ القيمة الموجبة للزاوية ثمّ المكاملة نجد أنّ

$$\psi' = 1 \overset{\text{بالمكاملة}}{\Longrightarrow} \psi = t + \psi_0$$

وبتعويض قيمة ψ, t لحظة البدء أي $\psi = t = 0$ نجد أنّ $\psi_0 = 0$ وبالتالي فإنّ $\psi = t$.

بتعويض $\psi' = 1$ في شعاع الدوران نجد أنّ:

$$\vec{\omega} = \theta' = \vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}$$

والآن من علاقة السرعة للنقطة B نجد أنّ:

$$\vec{V}(B) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \theta' & \sin\theta & \cos\theta \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} + (\theta' - \sin\theta)\vec{k}$$

ولكن حسب الفرض سرعة B تُعطى بالعلاقة: $\overrightarrow{V^2}(B) = 1 + \cos^2\theta$

وعليه فإنّ: $1 + \cos^2\theta = \cos^2\theta + \cos^2\theta + (\theta' - \sin\theta)^2$ أي يكون

$$1 = \underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{=1} + \theta'^2 - 2\theta'\sin\theta$$

$$\Rightarrow \theta'(\theta' - 2\sin\theta) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta' = 0 & \text{مرفوض} \\ \theta' - 2\sin\theta = 0 \Rightarrow \dfrac{d\theta}{dt} = 2\sin\theta \end{cases}$$

بتعويض $\theta' = 2\sin\theta$ بشعاع الدوران نجد

$$\vec{\omega} = 2\sin\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{l} + \cos\theta\,\vec{k}$$

نجري تغيير بالمتحول $tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = u$ فيكون $\sin\theta = \frac{2u}{1+u^2}$ و $d\theta = \frac{2du}{1+u^2}$ وبالتعويض نجد أنَّ

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\sin\theta \Rightarrow \frac{d\theta}{\sin\theta} = 2dt \Rightarrow \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}} = 2dt \Rightarrow \frac{du}{u} = 2dt$$

ومن ثمّ بالمكاملة يكون:

$$\ln|u| = 2t + c_0 \Rightarrow u = e^{2t+c_0} \Rightarrow tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = e^{2t+c_0} \Rightarrow \theta = 2arc\,tg(e^{2t+c_0})$$

وبالتالي فإنّ معادلات الحركة هي

$$\psi = t \;, \quad \theta = 2arc\,tg(e^{2t+c_0}) \quad , \quad \varphi = 0$$

2- يُعطى قانون السرعة المطلقة بالعلاقة، وذلك بفرض $M \in OC$ أي $M(0, y_M, 0)$

$$\overrightarrow{V_a}(M) = \overrightarrow{V_r}(M) + \overrightarrow{V_e}(M)$$

حيث $\overrightarrow{V_r}(M)$ هي السرعة النسبية وقيمتها هي v أي يكون $\overrightarrow{V_r}(M) = v\vec{\jmath}$

السرعة الجرية $\overrightarrow{V_e}(M) = \vec{V}(O) + \overrightarrow{\omega_e} \wedge \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\omega_e} \wedge \overrightarrow{OM}$

$$\overrightarrow{V_e}(M) = (0,0,0) + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_e \\ 0 & y_M & 0 \end{vmatrix} = -\omega_e(y_M, 0,0) = -\overrightarrow{\omega_e} y_M \vec{\imath}$$

وعليه فإنّه يكون:

$$\overrightarrow{V_a}(M) = \overrightarrow{V_r}(M) + \overrightarrow{V_e}(M) = v\vec{\jmath} - \overrightarrow{\omega_e} y_M \vec{\imath} = (-\overrightarrow{\omega_e} y_M, v, 0)$$

انتهى الحل .....