ملخص البنى ((1))

علاقات التكافؤ: لتكن P مجموعة غير خالية و ρ علاقة ثنائية معرفة على P يُقال عن ρ إنها علاقة تكافؤ على P إذا كانت:

انعكاسية و متناظرة و متعدية

1// **مبرهنة**: لتكن P مجموعة غير خالية ولتكن ρ علاقة تكافؤ معرفة على P وليكن:

$a, b \in P$: $\bar{a} = \bar{b} \Longleftrightarrow a \in \bar{b}$

2// **مبرهنة**: لتكن ρ علاقة تكافؤ معرفة على المجموعة P فإن المجموعة P/ρ المعرفة بالشكل:

$P/\rho = \{\bar{a} : a \in P\}$

تشكل تجزئة.

3// **مبرهنة**: لتكن P مجموعة غير خالية ولتكن Σ تجزئة للمجموعة P ولتكن ρ علاقة تكافؤ معرفة على المجموعة P، اثبت أن: $\boxed{\Sigma = P/\rho}$ حيث ρ معرفة بالشكل:

$\forall a,b \in P : a \rho b \Longleftrightarrow \exists A \in \Sigma ; a,b \in A$

4// **مبرهنة**: لتكن P مجموعة غير خالية ولنفرض أن Θ ، Σ تجزئتين للمجموعة P وأن ρ_Σ و ρ_Θ علاقتي التكافؤ الناتجتين عن التجزئتين Σ و Θ ، عندئذ: $\Sigma = \Theta \Longleftrightarrow \rho_\Sigma = \rho_\Theta$

5// **مبرهنة**: P مجموعة غير خالية ونفرض L اسم لكل التجزئات المعرفة على P .

و L_ρ اسم لكل العلاقات التكافؤ .

عندئذ يوجد تطبيق تقابل بين: L_ρ و L :

$f : L_\rho \longrightarrow L$

(تقابل)

إعداد: سمير الكردي

علاقات الترتيب: لتكن ℜ علاقة على P
المعرفة على P إنها علاقة ترتيب جزئي
إذا كانت انعكاسية وتخالفية ومتعدية
ونرمز لها عادة بالرمز $\leq$

مبرهنة: لتكن P مجموعة غير خالية و ($\leq$) علاقة انعكاسية ومتعدية معرفة على P:
عندئذ: العلاقة ℜ المعرفة بالشكل:

$\forall a,b \in P,\ a\Re b \Leftrightarrow a\leq b,\ b\leq a$

1. هي علاقة تكافؤ.
2. العلاقة ($\leq$) هي علاقة ترتيب.

تعاريف: * العنصر الأصغر: لتكن P مجموعة مرتبة جزئياً وليكن $a\in P$
نقول عن العنصر $a\in P$ أنه عنصر أصغر في P إذا حقق: $\forall x\in P;\ a\leq x$

* العنصر الأصغري: نقول عن $b\in P$ إنه عنصر أصغري إذا حقق:

[illegible]

* العنصر الأكبر: نقول عن العنصر $a\in P$ أنه عنصر أكبر في P إذا حقق: $\forall x\in P,\ x\leq a$

* العنصر الأعظمي: نقول عن العنصر $b\in P$ أنه عنصر أعظمي في P إذا حقق:

$\forall y\in P,\ b\leq y \Rightarrow y=b$

ملاحظة: كل عنصر أصغر هو أصغري
وكل عنصر أكبر هو أعظمي
العنصر الأصغر (الأكبر) في حال وجوده يكون وحيد

64

مبرهنة (هامة) لتكن $(P,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً. تكون الشروط متكافئة:

1. الشرط الأصغري: كل مجموعة جزئية وغير خالية في P تحوي عنصراً أصغرياً.
2. شرط الاستقراء: لتكن θ خاصية ما ولنفرض أن جميع العناصر الأصغرية في P تحقق الخاصية θ وليكن $a\in P$ عنصر إذا كانت جميع العناصر $x\in P$

التي لا تحوي $x < a$ المجموعة الشعرية $\emptyset$

تفضي إلى أن a يحقق الخاصية $\emptyset$

عندئذٍ جميع عناصر P تحقق الخاصية $\emptyset$

$\boxed{3}$ شرط انقطاع السلاسل المتناقصة:

أي سلسلة متناقصة من عناصر P

الشكل: $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$

تنقطع

مبرهنة: كل مجموعة جزئية غير خالية

في N تحوي عنصر أصغر

مكافئة زورن: لتكن P مجموعة

مرتبة جزئياً، إذا كانت كل مجموعة جزئية

مرتبة كلياً من P لها حد

أعلى (أعلى) بالنسبة P فإن P تحوي عنصر

أعظمي (أعظمي) واحد على الأقل

إعداد سمير الكردي

قدرة مجموعة (رئيس مجموعة) هو مقدار

يدل على كمية العناصر في هذه المجموعة

نرمز له بـ Card A ونقرأ عدد عناصر

المجموعة A

تعريف: لتكن A, B مجموعتين متكافئتين:

نقول أن Card A = Card B

إذا وجد تطبيق غامر ومتباين من إحدى المجموعتين

إلى الأخرى ونرمز لذلك:

$$A \sim B \iff \exists f : A \xrightarrow[\text{غامر}]{\text{متباين}} B$$

* إذا كان $\text{Card}\, A \leq \text{Card}\, B$

فإن $\iff \exists f : A \xrightarrow{\text{متباينة}} B$

مبرهنة كانتور برونشتاين:

لتكن A, B مجموعات، إذا وجد تطبيق

متباين $f : A \to B$ وتطبيق متباين

آخر $g : B \to A$ عندئذٍ يوجد تطبيق

متباين غامر $f : A \to B$

إذن: $\text{Card}\, A = \text{Card}\, B$

8//

مبرهنة: لتكن A مجموعة ما، و $P(A)$ أسرة كل المجموعات الجزئية من A عندئذ:

$$\text{Card}\, A < \text{Card}\, P(A)$$

ملاحظة: نقول عن مجموعة A أنها قابلة للعد إذا كانت $A \subseteq N$

أي: يوجد تطبيق متباين غامر بين A و N:

$$f : A \xrightarrow[\text{غامر}]{\text{متباين}} N$$

إذن: $\text{Card}\, A = \text{Card}\, N$

9//

تمرين هام: مجموعة الأعداد الصحيحة قابلة للعد أي أن: $\text{Card}\, N^* = \text{Card}\, Z$

10//

مبرهنة: كل مجموعة جزئية وغير منتهية في N^* تكون قابلة للعد.

مبرهنة: كل مجموعة جزئية وغير منتهية من مجموعة قابلة للعد تكون قابلة للعد أيضاً

تعريف: ليكن $a, b \in Z$ بحيث $b \neq a$ نقول ان b يقسم a في Z إذا وجد $d \in Z$ بحيث $a = bd$ نسمي b بالمقسوم عليه و a الناتج.

تعريف: نقول عن العدد $p \in Z$ انه اولي إذا كان $p > 1$ وكانت مجموعة قواسمه $\{\mp p, \mp 1\}$

11//

مبرهنة خوارزمية القسمة

ليكن $a, b \in Z$ بحيث $0 < b$ عندئذ: يوجد $q, r \in Z$ بحيث: $a = qb + r$

$0 \leq r < b$، فضلاً عن ذلك فإن q, r يتعينان بشكل وحيد.

تعريف: ليكن $0 \neq a, b \in Z$ نسمي أكبر عدد صحيح موجب يقسم كلاً من a, b بالقاسم المشترك الأكبر للعددين ونرمز له بـ: $\gcd(a, b)$

إذا كانت a, b أوليان فيما بينهما فإن: $gcd(a,b)=1$

4) $\forall a\in G;\ \exists b\in G:$

$a.b=b.a=e$

ويسمى b بالعنصر النظير لـ a ويرمز له بـ a^{-1}

1/2

مبرهنة: لتكن $a,b\in Z$ غير معدومين

نحتفظ بوجود $s,t\in Z$ بحيث:

$$gcd(a,b)=sa+tb$$

فضلا عن ذلك فإن $gcd(a,b)$ هو أصغر عدد صحيح موجب من الشكل $sa+tb$

1/3

مبرهنة إقليدس:

ليكن $a,b\in Z$ وليكن p عددا أوليا

إذا كان p يقسم الجداء $a.b$ فيكون

p يقسم a أو يقسم b.

الزمرة: «الشروط الزمرية»

1) $\forall a,b\in G:\ a.b\in G$

2) $\forall a,b,c\in G:\ (a.b).c=a.(b.c)$

3) $\exists e\in G:\ a.e=e.a=a\ \forall a\in G$

4

مبرهنة: لتكن G زمرة، فإن:

1) العنصر المحايد في G وحيد

2) مقلوب أي عنصر في G وحيد

3) قانون الاختصار محقق أي:

$\forall a,b,c\in G:\ ab=ac\Rightarrow b=c$

4) $\forall a\in G:\ (a^{-1})^{-1}=a$

5) $\forall a_1,a_2,\dots,a_n\in G:$

$(a_1\dots a_n)^{-1}=a_n^{-1}a_{n-1}^{-1}\dots a_1^{-1}$

1/4

مبرهنة: لتكن G زمرة و H مجموعة جزئية في G: الشروط الآتية متكافئة

1) H زمرة جزئية في G

2) (P) $\forall a,b\in H:\ a.b\in H$

(Q) $\forall c\in H:\ c^{-1}\in H$

5

$\boxed{13}$ $\forall a,b \in H : a.b^{-1} \in H$

تمرين $\boxed{3}$ لتكن $(G,*)$ زمرة تبديلية وليكن:

$H = \{x : x \in G ,\ x^2 = e\}$

اثبت ان H تشكل زمرة جزئية في G

تمرين $\boxed{4}$ المجموعة nZ تشكل زمرة جزئية في $(Z,+)$

مبرهنة $\boxed{5}$ لتكن G زمرة و H مجموعة جزئية منتهية في عندئذ الشرط اللازم والكافي لكي تكون H زمرة جزئية في G هو ان يتحقق الشرط:

$\forall a,b \in H : a.b \in H$

تمهيدية $\boxed{6}$ لتكن G زمرة , $a \in G$ عندئذ: $n,m \in Z$

$a^n . a^m = a^{n+m}$

$(a^n)^m = a^{n.m}$

$\boxed{7}$

تمارين $\boxed{1}$ لتكن G زمرة , $a \in G$

$\langle a \rangle = \{a^n ; n \in Z\}$

تشكل زمرة جزئية تبديلية في G وتسمى الزمرة المولدة بالعنصر a

$\boxed{8}$ $\boxed{2}$ $Z(G) = \{a ; a \in G : xa = ax ;\ \forall x \in G\}$

تشكل زمرة جزئية تبديلية في G تسمى مركز الزمرة.

$\boxed{9}$ **ملاحظة**: تقاطع اي اسرة من الزمر الجزئية هو زمرة جزئية في G.

* اجتماع زمرتين جزئيتين ليس زمرة جزئية بالضرورة. المثال: $3Z , 2Z$ بالنسبة للزمرة $(Z,+)$

زمرة الجمع بالمقاس (n)

$Z_n = \{0,1,2,\ldots,(n-1)\}$

$\boxed{6}$ $\forall a,b \in Z_n$:

$a \oplus b = r = a+b \mod n$

الثلاثية $(Z, \oplus)$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الجمع بالمقاس n ، وهي زمرة تبديلية.

زمرة الضرب بالمقاس (n)

$U(n) = \{x : x\in Z ; 1\le x<n ; \gcd(x,n)=1\}$

$\boxed{14}$

مبرهنة هامة:

ليكن $1<n$ عدد صحيح و:

$D = \{1, 2, 3, \dots (n-1)\}$

الشرط اللازم والكافي لكي تكون D زمرة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس n هو أن يكون n أولياً.

$\boxed{15}$

تعميم: ليكن $n>1$ عدداً صحيحاً وكان k قاسم موجب للعدد n ، ان المجموعة:

$U_k(n) = \{x : x\in U(n) : x \mod k = 1\}$

تشكل زمرة جزئية من G

$\boxed{12}$

$\boxed{\text{المرافقات}}$: خاصية: لتكن G زمرة و H زمرة جزئية في G فإن:

$\boxed{1}$ $\forall a\in G \Rightarrow a\in aH$

$\boxed{2}$ $\forall a\in G : aH = H \Leftrightarrow a\in H$

$\boxed{3}$ $\forall a,b\in G : aH = bH \Leftrightarrow b^{-1}.a\in H$

$\boxed{4}$ $\forall a,b\in G : aH = bH$ إما أو $aH\cap bH = \phi$

$\boxed{5}$ $\forall a\in G : a\in H \Leftrightarrow aH$ زمرة جزئية

$\boxed{13}$

مبرهنة: لتكن G زمرة و H زمرة جزئية في G ، ونعرف أن:

$M_L = \{aH ; a\in G\}$ مجموعة المرافقات اليسارية

$M_r = \{Ha ; a\in G\}$ مجموعة المرافقات اليمينية

عندئذٍ: $\boxed{1}$ أي أنه لكل $a,b\in G$ فإن:

$Card\, H = Card\, aH = card\, bH$

2. $Card\ M_l = Card\ M_r$

3. كلاً من M_l و M_r يشكل تجزئة لـ G

15

مبرهنة لاغرانج: لتكن G زمرة منتهية و H زمرة جزئية في G عندئذٍ

$$(G:1) = (G:H)(H:1)$$

أو بشكل آخر: مرتبة أي زمرة جزئية في G تقسم مرتبة G ...

17

الزمر الدورية ((الدوارية))

لتكن G زمرة، S مجموعة جزئية غير خالية في G عندئذٍ:

1. تقاطع جميع الزمر الجزئية والتي كل منها تحوي S هو زمرة جزئية تحوي S

2. الزمرة الجزئية $\langle S \rangle$ هي أصغر زمرة جزئية في G تحوي S

3. إن $\langle S \rangle$ هي العنصر الأصغري في مجموعة كل الزمر الجزئية في G التي كل منها يحوي S

19

مبرهنة: لتكن G زمرة و $a \in G$:

عندئذ: $\langle a \rangle = \langle a^{-1} \rangle$

مبرهنة: كل زمرة دوارية تكون تبديلية

16

دوارية: لتكن G زمرة، نقول إن G دوارية إذا تولدت بالعنصر $a \in G$ أي: $G = \langle a \rangle = \{a^n ; n \in \mathbb{Z}\}$

نعتبر العلاقة: $\varphi : \mathbb{Z} \to G$

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \varphi(n) = a^n \in G$$

تشاكل غامر.

* إذا كان φ متباين $\Leftrightarrow$ G غير منتهية

18

مبرهنة: لتكن G زمرة دوارية أي أن $G = \langle a \rangle$ الشروط الآتية متكافئة:

1. الزمرة G منتهية

2. يوجد في $\mathbb{Z}$ عناصر بحيث $n \neq m$ وإن $a^n = a^m$

3. يوجد $k \in \mathbb{N}^*$ بحيث: $G = \{e, a, a^2, \dots, a^{k-1}\}$ وهذه العناصر مختلفة مثنى مثنى

تعريف: لتكن G زمرة، a عنصر من G ...

نسمي أصغر عدد صحيح موجب t لأجله: $a^t = e$ بالرتبة (درجة) العنصر a

ونرمز لذلك: $o(a) = t$

وفي حال عدم وجود t نقول أن العنصر a من رتبة غير منتهية ونرمز لذلك

$o(a) = \infty$

$\boxed{20}$

مبرهنة: لتكن G زمرة و $a \in G$ وأن $o(a) = n$ عندئذ:

$\boxed{1}$ لأجل أي عدد صحيح t يقسم n فإن

$$o(a^{\frac{n}{t}}) = t \qquad (15)$$

$\boxed{2}$ إذا كانت $G = \langle a \rangle$ عندئذ:

$$(G:1) = o(a) = n$$

$\boxed{23}$

مبرهنة: لتكن G زمرة دوارة بالعنصر a أي أن تكون دوارة $G = \langle a \rangle$ حيث $a \in G$ أي

ويفرض أن $o(a) = (G:1) = n$

الشروط الآتية متكافئة:

$\boxed{1}$ $G = \langle a^k \rangle$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{2}$ $gcd(n,k) = 1$

$\boxed{21}$

مبرهنة: لتكن G زمرة دوارة بالعنصر $a \in G$ أي أن $G = \langle a \rangle$ عندئذ:

$\boxed{1}$ كل زمرة جزئية في G هي زمرة دوارة

$\boxed{2}$ إذا كانت G منتهية ومن رتبة n فإن مرتبة أي زمرة جزئية من G تقسم n.

$\boxed{3}$ إذا كانت G منتهية ومرتبتها n فإنه يوجد في G زمرة جزئية واحدة فقط مرتبتها k هي $\langle a^{\frac{n}{k}} \rangle$

$\boxed{22}$

عكسية: كل زمرة منتهية مرتبتها عدد أولي تكون دوارة.

$\boxed{23}$

تمرين: لتكن G زمرة و $a, b \in G$

$o(a) = n$ و $o(b) = m$

و $a \cdot b = b \cdot a$ و $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle e \rangle$

فإن $o(a \cdot b) = lcm(n, m)$

[24]

مبرهنة: لتكن G زمرة، $a, b \in G$

و $o(a) = n$ و $o(b) = m$

و $a.b = b.a$

و $\gcd(n, m) = 1$ فإن:

$o(a.b) = o(a).o(b)$

[25]

مبرهنة: لتكن G زمرة و H زمرة جزئية في G ، الشروط الآتية متكافئة:

1) H ناظمية في G .

2) $\forall a \in G \Rightarrow aHa^{-1} \subseteq H$

3) $\forall a \in G \Rightarrow a^{-1}Ha \subseteq H$

تعريف: نقول عن H إنها زمرة جزئية ناظمية في G إذا كان:

$\forall a \in G \,;\, aH = Ha$

[26]

تمرين: $Z(G)$ هي زمرة جزئية ناظمية في G

[27]

مبرهنة: لتكن G زمرة، القضايا التالية صحيحة:

1) H و K زمرتين جزئيتين في G بحيث $H \subseteq K$ إذا كانت H ناظمية في G عندئذٍ H ناظمية في K

2) H جزئية في G ، إذا كان $(G:H) = 2$ عندئذٍ تكون الزمرة الجزئية H ناظمية في G

[28]

مبرهنة: لتكن G زمرة و A, B زمرتين جزئيتين في G ، الشروط الآتية متكافئة:

1) $A.B$ زمرة جزئية في G

2) $A.B = \langle A \cup B \rangle$

3) $A.B = B.A$

[29]

مبرهنة: لتكن G زمرة و A, B زمرتين جزئيتين في G ، إذا كانت B ناظمية في G عندئذٍ:

1) $A.B$ زمرة جزئية في G

2) $A.B = \langle A \cup B \rangle$

3) $A.B = B.A$

مبرهنة: لتكن G زمرة، A, B زمرتان جزئيتان في G عندئذٍ:

[1] إذا كانت كلاً من A, B زمرة جزئية ناظمية في G فإن A.B زمرة جزئية ناظمية في G

[2] إذا كانت كلاً من A, B تبديلية منتهية وكانت $A \cap B = \langle e \rangle$ عندئذٍ A.B تبديلية

تعريف: لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G:

$G/H = \{aH \; ; \; a \in G\}$

نسمي G/H زمرة الخارج

المعرفة على العملية الثنائية:

$(aH, bH) \longrightarrow (aH)(bH) = (ab)H$

$(G/H, G/H) \longrightarrow G/H$

مبرهنة: لتكن G زمرة، H جزئية ناظمية في G عندئذٍ:

المجموعة $G/H = \{aH \; , \; a \in G\}$

هي زمرة مع العملية (.) المعرفة بالشكل:

[1] $\forall aH, bH \in G/H : (aH)(bH) = (ab)H$

[2] العنصر المحايد هو $H = eH$ ومعكوس $aH \in G/H$ هو $a^{-1}H = (aH)^{-1}$

[31] **مبرهنة**: لتكن G زمرة و $Z(G)$ هي زمرة جزئية ناظمية في G عندئذٍ:

إذا كانت $\frac{G}{Z(G)}$ زمرة دوارة فإن G تكون زمرة تبديلية

[32] **مبرهنة**: لتكن G زمرة، H جزئية ناظمية في G، الزمرة الجزئية في زمرة الخارج G/H هي من الشكل D/H حيث D هي زمرة جزئية في G تحوي H.

التشاكلات الزمرية: لتكن

تشاكل زمري:

ط

تشاكل من G و G' : $f : G \to G'$ ناظمي في G

عندئذ: $\boxed{1}$ $f(e) = e'$

$\boxed{2}$ $\forall a \in G : f(a^{-1}) = f^{-1}(a)$

$\boxed{3}$ $\forall a \in G , n \in \mathbb{Z} : f(a^n) = (f(a))^n$

$\boxed{4}$ $\ker f$ زمرة جزئية ناظمية في G .

$\boxed{3}$ $\ker f = \langle e \rangle \Leftrightarrow f$ متباين

ملاحظة هامة: لتكن G زمرة ، كل زمرة جزئية ناظمية في G هي نواة تشاكل زمري ما .

مبرهنة 2 : ليكن $f : G \to G'$ تشاكل زمري ، H زمرة جزئية في G عندئذ:

$\boxed{1}$ $f(H)$ هي زمرة جزئية في G

$\boxed{2}$ إذا كانت H تبديلية فإن $f(H)$ تبديلية .

$\boxed{3}$ إذا كانت H دوارة فإن $f(H)$ دوارة

$\boxed{4}$ إذا كانت H ناظمية في G فإن $f(H)$ ناظمية في $Im f$ ، $f(G)$ ...

تعريف: لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G يسمى التشاكل : $\pi : G \to G/H$ بالتشاكل الزمري القانوني : $\forall a \in G : \pi(a) = aH$

تعريف: ليكن f تشاكل وكان f تقابل $\Leftrightarrow$ f تماثل (إيزومورفيزم)

مبرهنة 3 : ليكن التشاكل الزمري $f : G \to G'$ و K زمرة جزئية في G'

عندئذ: $\boxed{1}$ $f^{-1}(K)$ زمرة جزئية في G

$\boxed{2}$ إذا كانت K ناظمية في G' فإن $f^{-1}(K)$

ملاحظة: f تشاكل : هومومورفيزم

f متباين : مونومورفيزم

f غامر : إيبيمورفيزم ..

مبرهنات التماثل :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{Im}(f) \le G' \\ G/\ker f \arrow[ur, "\varphi"', "\cong"] & \end{tikzcd}$$

مبرهنة التماثل الأولى :

ليكن G و G' زمرتين و $f : G \to G'$ تشاكل زمري فإن :

1) $G/\ker f \cong \mathrm{Im}(f)$

2) إذا كان f غامرًا فإن : $\dfrac{G}{\ker f} \cong G'$

مبرهنة التماثل الثانية :

لتكن G زمرة و H و K زمر جزئية في G بحيث K ناظمية في G

فإن : $\dfrac{H.K}{K} \cong \dfrac{H}{H \cap K}$

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\varphi", "\text{تشاكل غامر}"'] \arrow[d, "\pi"'] & H.K/K \\ H/\ker\varphi \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

مبرهنة التماثل الثالثة

لتكن G زمرة و H و K زمر جزئية ناظمية في G بحيث $K \subseteq H$ فإن

1) الزمرة K ناظمية في H

2) الزمرة H/K ناظمية في G/K

3) $G/H \cong \dfrac{G/K}{H/K}$

مبرهنة : ليكن n عدد صحيح عندئذٍ $\dfrac{Z}{nZ} \cong Z_n$

مبرهنة :

1) كل زمرة دوارة وغير منتهية تماثل Z

2) جميع الزمر الدوارة وغير المنتهية متماثلة

3) كل زمرة دوارة ومنتهية ومن رتبة n تماثل الزمرة Z

4) جميع الزمر الدوارة والمنتهية التي لها رتبة واحدة متماثلة

IAM

تمارين << السؤال الثالث >>

لتكن $(U(15), \cdot)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الضرب بالمقياس 15،

المطلوب: 1. أوجد جميع عناصر الزمرة $(U(15), \cdot)$.

2. شكل جدولاً تبين فيه مقلوب ورتبة جميع عناصر الزمرة $(U(15), \cdot)$

3. أثبت أن المجموعة $K=\{1,2,4,8\}$ تشكل زمرة جزئية في الزمرة $(U(15), \cdot)$ وهل الزمرة K دوارة ؟

4. أوجد جميع مرافقات الزمرة الجزئية K في الزمرة $(U(15), \cdot)$ ثم أوجد زمرة الخارج $U(15)/K$.

5. لنأخذ في الزمرة $(U(15), \cdot)$ الزمرة الجزئية $H=\{1,14\}$، وهل $U(15)/H \cong Z_4$ و $U(15)/K \cong Z_2$ ولماذا ؟ وهل $U(15)/H \cong U(15)/K$ ولماذا ؟

6. هل الزمرة $(U(15), \cdot)$ هي p-زمرة ؟ ولماذا؟

7. حدد أنواع الـ p-زمرة جزئية في $(U(15), \cdot)$

نموذج ثاني:

لتكن $(Z_8, +)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الجمع بالمقاس 8، المطلوب:

1. أوجد عناصر الزمرة $(Z_8, +)$، ثم شكل جدولاً تبين فيه نظير ورتبة كل عناصر الزمرة $(Z_8, +)$.

2. أثبت أن المجموعة $K=\{0,2,4,6\}$ تشكل زمرة جزئية في الزمرة $(Z_8, +)$ وهل الزمرة K دوارة

3. أوجد جميع مرافقات الزمرة الجزئية K في الزمرة $(Z_8, +)$ ثم أوجد زمرة الخارج Z_8/K

4. هل الزمرة $(Z_8, +)$ هي p-زمرة ؟ و لماذا؟ حدد أنواع الـ p-زمرة الجزئية في $(Z_8, +)$.

5. لنأخذ في الزمرة Z_8 الزمرة الجزئية $H=\{0,4\}$، هل $Z_8/H \cong Z_4$ و $Z_8/K \cong Z_2$ ولماذا ؟؟

السؤال الثالث : لتكن $(U(15),.)$ زمرة الاعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 15 المطلوب :

١) أوجد عناصر الزمرة $U(15)$. ثم شكل جدولا تبين فيه مقلوب ومرتبة جميع عناصر الزمرة $U(15)$.

٢) إثبت ان المجموعة $H=\{1,2,4,8\}$ تشكل زمرة جزئية دوارة في الزمرة $U(15)$ وأوجد جميع مولداتها.

٣) أوجد الزمرة $U_3(15)$.

٤) أوجد جميع مرافقات الزمرة الجزئية H في الزمرة $U(15)$ ثم أوجد زمرة الخارج $U(15)/H$.

٥) أوجد ثلاث زمر جزئية مختلفة في الزمرة $U(15)$ مرتبة كل منها تساوي 2 .

٦) هل الزمرة $U(15)$ هي p – زمرة ؟ ٧) أثبت أن زمرة الخارج $U(15)/U_3(15)$ دوارة .

٨) أوجد زمرة جزئية في N في الزمرة $U(15)$ تحقق $U(15)/U_3(15) \cong N \cong Z_3$.

السؤال الثالث :

١) أوجد جميع عناصر الزمرة $(U(15),.)$.

الحل : العناصر الأولية مع العدد 15 الأصغر من 15 .

$$U(n)=\{x : x\in N ,\ 0<x<n ,\quad \gcd(x,n)=1\}$$

$$U(15)=\{1,2,4,7,8,11,13,14\}$$

للحصول على مقلوب كل عنصر نأخذ العنصر الذي يكون ناتج تنفيذ العملية معه يعطي الحيادي وبما أن $(a^{-1})^{-1}$ هو a نكتفي بالتالي ((علما أن النواتج تكون باقي القسمة على 15))

$1.1=1 ,\quad 2.8=1 ,\quad 4.4=1$

$7.13=1 ,\quad 8.2=1 ,\quad 11.11=1$

$13.7=1 ,\quad 14.14=1$

وبالتالي يكون جدول المقاليب هو :

a	1	2	4	7	8	11	13	14
a^{-1}	1	8	4	13	2	11	7	14

الآن للحصول على مرتبة العناصر نرفع كل عنصر للاس و عندها يظهر المحايد نأخذ الأس كمرتبة للعنصر (الأس عبارة عن اصغر عدد موجب لأجله $a^k=1$).

$1^1=1$

$2^1=2 \quad ,2^2=4 ,2^3=8 ,2^4=1$

$4^1=4 \quad ,4^2=1$

$7^1=7 ,7^2=4 ,7^3=13 ,7^4=1$

$8^1=8 ,8^2=4 ,8^3=2 ,8^4=1$.

$11^1=11 ,11^2=1$

$13^1=13 ,13^2=4 ,13^3=7 ,13^4=11$

$14^1=14 ,14^2=1$

وبالتالي يكون جدول مراتب العناصر هو :

a	1	2	4	7	8	11	13	14
$o(a)$	1	4	2	4	4	2	4	2

نلاحظ ان المجموعة H منتهية وجزئية من $U(15)$ و إثبات أن H زمرة جزئية في $(U(15),.)$ يجب أن يحقق الشرط :

$$\forall x,y\in K ;x.y\in K$$

$\odot$	1	2	4	8
1	1	2	4	8
2	2	4	8	1
4	4	8	1	2
8	8	1	2	4

$$2^0=1 ,\quad 2^1=2 ,2^2=4,\quad 2^3=8 \Longrightarrow H=<2>$$

$$4^0 = 1 \ , \ 4^1 = 4 \ , 4^2 = 1 \Rightarrow H = < 2 >$$
$$8^0 = 1 \ , \ 8^1 = 8 \ , 8^2 = 4, \ 8^3 = 2 \Rightarrow H = < 8 >$$

اي ان H مولدة بـ 2,8 .

٣) تعريف الزمرة الجزئية من الشكل ($U_k(n)$) $U_k(n) = \{a : a \in U(n) \ ; a \ mod - k = 1\}$

وبالتالي فان $U_3(15)$

$$U_3(15) = \{1,4,7,13\}$$

٤) عدد المرافقات حسب لاغرانج يكون :

$$(U(15):H) = \frac{(U(15):1)}{(H:1)} = \frac{8}{4} = 2$$

لنوجد كل المرافقات اليسارية وهي من الشكل

نعلم ان $a.H = H \Leftrightarrow a \in H$ ومنه

$$1.H = \{1,2,4,8\}$$
$$2.H = \{2,4,8,1\}$$
$$4.H = \{4,8,1,2\}$$
$$8.H = \{8,1,2,4\}$$

وبالتالي فإن

$$1.H = 2.H = 4.H = 8.H$$

ولنوجد المرافقات المتبقية :

$$7.H = \{7,14,13,11\} = 11.H = 13.H = 14.H$$

وبذلك يكون لدينا مرافقين مختلفين وهما : $H \ ,7.H$.

لنوجد زمرة الخارج :

بما أن $U(15)$ زمرة تبديلية و H زمرة جزئية من $U(15)$ فإن H ناظمية في $U(15)$ وبالتالي $\frac{U(15)}{H}$ معرفة وبالتالي تكون زمرة الخارج :

$$\frac{U(15)}{H} = \{a.H \ : a \in U(15)\} = \{H \ ,7.H\}$$

لنأخذ $o(4) = o(11) = o(14) = 2$ (أوجدنا مراتب هذه العناصر بالطلب الأول)

لنأخذ الزمر المولدة بهذه العناصر اي

$$H = \{1,4\}$$
$$H_1 = \{1,11\}$$
$$H_2 = \{1,14\}$$

إن $(U(15),.)$ هي $p-$ زمرة لان : $(U(15):1) = 8 = 2^3$

وهي $2-$ زمرة لان مرتبتها قوة للعدد الأولي 2 .

وجدنا أن

$$U_3(15) = \{1,4,7,13\}$$

وأن

$$(U(15):1) = (U(15):U_3(15))(U_3(15):1)$$

أي أن

$$(U(15):U_3(15)) = \frac{(U(15):1)}{(U_3(15):1)} = 2$$

وبما ان عدد عناصرها ٢ وهو اولي فتكون دوارة .

وبما ان عدد عناصرها ٢ وهو اولي فتكون دوارة .

٨) إن $Z_2 = < 1 >$ دوارة وايضا وجدنا ان $(U(15):U_3(15))$ دوارة

وبما أن للزمرتين نفس المرتبة فهي متماثلة $(U(15):U_3(15)) \cong Z_2$

ولنفرض ان $N = < 4 > = \{1,4\}$

ومنه

$$(U(15):U_3(15)) \cong Z_2 \cong N$$

انتهى الحل

السؤال الثالث : لتكن $(U(14),\ .)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 14 المطلوب :

١) أوجد عناصر الزمرة $U(14)$. ثم شكل جدولا تبين فيه مقلوب ومرتبة جميع عناصر الزمرة $U(14)$.
٢) اثبت أن الزمرة $U(14)$ دوارة. ثم أوجد جميع مولداتها.
٣) اوجد الزمرتين الجزئيتين $U_7(14)$ $U_2(14)$
٤) أثبت أن المجموعة $K=\{1,9,11\}$ تشكل زمرة جزئية دوارة في الزمرة $U(14)$.
٥) أوجد جميع مرافقات الزمرة الجزئية K في الزمرة $U(14)$ ثم أوجد زمرة الخارج $U(14)/K$.
٦) أوجد عدد جميع الزمر الجزئية التي مرتبة كل منها تساوي 2 في الزمرة $U(14)$.
٧) لتكن Z_3 زمرة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الجمع بالمقاس 3 . هل الزمرة $U(14)\oplus Z_3$ دوارة ولماذا ؟ ثم أوجد مرتبة العنصر $(3,2)$ في الزمرة $U(14)\oplus Z_3$.

١) أوجد جميع عناصر الزمرة $(U(14),\ .)$.

الحل :العناصر الأولية مع الأعداد الأصغر من 15 .

$$U(n)=\{x : x\in\mathbb{N}\ ,0<x<n\ ,\quad \gcd(x,n)=1\}$$
$$U(14)=\{1,3,5,9,11,13\}$$

للحصول على مقلوب كل عنصر نأخذ العنصر الذي يكون ناتج تنفيذ العملية معه يعطي الحيادي وبما أن $(a^{-1})^{-1}$ هو a نكتفي بالتالي ((علما ان النواتج تكون باقي القسمة على 15))

$$1.1=1\ ,\ 3.5=1\ ,\quad 11.9=1$$
$$13.13=1\ ,$$

وبالتالي يكون جدول المقاليب هو :

a	1	3	5	9	11	13
a^{-1}	1	5	3	11	9	13

الآن للحصول على مرتبة العناصر نرفع كل عنصر للأس و عندما يظهر المحايد نأخذ الأس كمرتبة للعنصر (الأس عبارة عن اصغر عدد موجب لأجلة $a^k=1$).

$$1^1=1$$
$$3^1=3\quad ,3^2=9\ ,3^3=13\ ,3^4=11\ ,3^5=5,3^6=1$$
$$5^1=5\quad ,5^2=11\ ,5^3=13\ ,5^4=9\ ,5^5=3\ ,5^6=1$$
$$9^1=9\ ,9^2=11\ ,9^3=1$$
$$11^1=11\ ,11^2=9\ ,11^3=1\ ,$$
$$13^1=13\ ,13^2=1$$

وبالتالي يكون جدول مراتب العناصر هو :

a	1	3	5	9	11	13
$o(a)$	1	6	6	3	3	2

الزمرة $U(14)$ دوارة لانه تمكنا من ايجاد جميعا عناصرها بالشكل التالي

$$3^1=3\quad ,3^2=9\ ,3^3=13\ ,3^4=11\ ,3^5=5,3^6=1$$

وبالتالي فهي مولدة بالعنصر ٣ أي $U(14) = < 3 >$

وايضا مولدة بالعنصر $U(14) = < 5 >$

٣) لنعرف

$$U_k(n) = \{a : a \in U(n) : a \bmod - k = 1\}$$

ومنه فإن

$$U_2(14) = \{1,3,5,9,11,13\}$$

$$U_7(14) = \{1\}$$

٤) نلاحظ أن المجموعة K منتهية وجزئية من $U(14)$ فهي زمرة جزئية في $(U(14),.)$ يجب أن يتحقق الشرط :

$$x, y \in K : x.y \in K$$

⊙	1	9	11
1	1	9	11
9	9	11	1
11	11	1	9

وبالتالي هي زمرة جزئية وايضا دوارة لان $U(14)$ دوارة وكل زمرة جزئية من زمرة دوارة تكون ايضا دوارة

٥) عدد المرافقات حسب لاغرانج يكون :

$$(U(14):K) = \frac{(U(14):1)}{(K:1)} = \frac{6}{3} = 2$$

لنوجد كل المرافقات اليسارية وهي من الشكل $a.K$ بحيث $a \in U(15)$

نعلم أن $a.K = K \Leftrightarrow a \in K$ ومنه فإن :

$$1.K = \{1,9,11\} = 9.K = \{9,11,1\} = 11.K = \{11,1,9\}$$

$$3.K = \{3,13,5\} = 5.K = 13.K$$

وبذلك يكون لدينا مرافقين مختلفين وهما : $K, 3.K$.

لنوجد زمرة الخارج :

بما أن $U(14)$ زمرة تبديلية و K زمرة جزئية من $U(14)$ فإن K ناظمية في $U(14)$ وبالتالي $\frac{U(14)}{K}$ معرفة وبالتالي تكون زمرة الخارج :

$$\frac{U(14)}{K} = \{a.K : a \in U(14)\} = \{K, 3.K\}$$

٦) لا يوجد سوى زمرة وحيدة وهي $o(13) = 2$

$$< 13 > = \{1,13\}$$

$$U(14) \oplus Z_3 = \{(1,0),(3,0),(5,0),(9,0),(11,0),(13,0),$$
$$(1,1),(3,1),(5,1),(9,1),(11,1),(13,1)$$
$$(1,2),(3,2),(5,2),(9,2),(11,2),(13,2)\}$$

$$(U(14):1) = 6$$

$$(Z_3:1) = 3$$

وأن $\gcd(6,3) = 3$ وبالتالي $U(14) \oplus Z_3$ ليست زمرة دوارة

$$o(a,b) = lcm(o(a),o(b))$$

$$o(3,2) = lcm(o(3),o(2))$$

$$o(3,2) = lcm(6,3) = 6$$

انتهى الحل

ملاحظات لحل السؤال الثالث:

1.
$$Z_n = \{0,1,\dots,(n-1)\}$$
$$U_{(n)} = \{ x : x \in \mathbb{N} \ , \ 1 \leq x < n \ , \gcd(n,x) = 1 \}$$
$$U_k(n) = \{ x : x \in U_{(n)} \ , x(mod - k) = 1 \}$$

2. لاغرانج: لتكن G زمرة منتهية و H زمرة جزئية في G عندئذ:
$$(G:1) = (G:H).(H:1)$$

3. لتكن G زمرة منتهية فإن رتبة أي عنصر من الزمرة G تقسم عدد عناصر G

4. لتكن $(G,.)$ زمرة ولتكن H مجموعة جزئية ومنتهية وغير خالية في G

نقول عن H أنها زمرة جزئية في G إذا تحقق:
$$\forall a,b \in H \Rightarrow a.b \in H$$

5. إذا كانت G زمرة تبديلية فإن أي زمرة جزئية في G ستكون ناظمية في G

ونعرف زمرة الخارج بالشكل:
$$G \backslash H = \{a.H \ ; a \in G\}$$

6. الزمرة التي عدد عناصرها أولي تكون دوارة

7. لتكن $(G,.)$ زمرة منتهية وعدد عناصرها n

نقول عن $(G,.)$ إنها زمرة دوارة إذا وجد $a \in G$ بحيث $o(a) = n$

8. جميع الزمر الدوارة والمنتهية والتي لها الرتبة نفسها تكون متماثلة

9. جميع الزمر الدوارة وغير المنتهية تكون متماثلة

10. لتكن A, B زمرتين عندئذ نعرف الجداء المباشر بالشكل:

- $A \oplus B = \{ (a,b) \ ; \ a \in A, b \in B \}$
- $o(a,b) = lcm(o(a), o(b))$
- إذا كانت A و B زمرتين دوارتين ومنتهيتين ورتبتيهما n و m على الترتيب عندئذ: $A \oplus B$ زمرة دوارة $\Leftrightarrow \gcd(n,m) = 1$

11. لتكن $(G,.)$ زمرة منتهية

نقول عن G إنها p-زمرة إذا تحقق: $(G:1) = p^n$ حيث p عدد أولي و $n \in \mathbb{N}^*$