نظري

◄ دكتور المادة: ريم الحاج خليفة

◄ المحاضرة : الثانية ◄ عنوان المحاضرة : نظرية الحلقات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-مبرهنة تفيد بأن تقاطع حلقات جزئية هو حلقة جزئية في $\mathcal{R}$. وأن الاجتماع غير صحصح بالضرورة.

٢- العناصر القابلة للقلب وأمثلة عليها ومبرهنة لبعض خواصها .

٣- وأخيراً مبرهنة تفيد بأن مجموعة العناصر القابلة للقلب في $\mathcal{R}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب في $\mathcal{R}$.

مبرهنة : إذا كانت $\mathcal{R}$ حلقة فإن تقاطع أي مجموعة غير خالية من الحلقات الجزئية في $\mathcal{R}$ هو حلقة جزئية في $\mathcal{R}$.

البرهان : (**فكرة البرهان**) أولاً :نفرض مجموعة . ثانياً :نثبت انها غير خالية . ثالثاً : نطبق الشرطين اللذين وردا في مبرهنة المحاضرة السابقة .

بفرض أن $S = \{A_i \,;\forall\, i \in I\}$ حيث S مجموعة الحلقات الجزئية من الحلقة $\mathcal{R}$

بما أن $\forall\, i \in I : 0 \in A_i$ فإن $0 \in \cap_{i\in I} A_i$ وبالتالي فإن $\cap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$

ليكن $x, y \in \cap_{i\in I} A_i$ عندئذٍ بما أن $\forall\, i \in I :\ x, y \in A_i$ وبما أن A_i حلقة جزئية في $\mathcal{R}$ فإن :

$x - y \in A_i \Longrightarrow x - y \in \cap_{i\in I} A_i$ وبالتالي الشرط الأول محقق .

وايضاً لما كانت A_i حلقة جزئية في $\mathcal{R}$ فإن :

$$x.y \in A_i \,;\forall i \in I \Longrightarrow x.y \in \cap_{i\in I} A_i$$

اذا S هي حلقة جزئية من الحلقة $\mathcal{R}$.

ملاحظة : اجتماع حلقتين جزئيتين من الحلقة ليس بالضرورة أن يكون حلقة جزئية السبب هو أن اجتماع زمرتين جزئيتين ليس بالضرورة أن يكون زمرة جزئية .

مثال على الملاحظة : لنأخذ حلقة الاعداد الصحيحة ولنأخذ حلقتين جزئيتين من حلقة الاعداد الصحيحة

ولتكن $2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}$ نجد أن $2{,}3 \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ ولكن $3 - 2 = 1 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ ومنه فإن $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ **ليست حلقة جزئية في حلقة الأعداد الصحيحة .**

العناصر القابلة للقلب : **((تعريف)):** لتكن $\mathcal{R}$ حلقة واحدية وليكن $a \in \mathcal{R}$ مغاير للصفر (لا يساوي الصفر) :

١- نقول عن العنصر a أنه قابل للقلب من اليسار في $\mathcal{R}$ إذا وجد عنصر وليكن $b \in \mathcal{R}$ بحيث يحقق العلاقة $b.a = 1$ (أي يوجد له مقلوب من اليسار).

٢- نقول عن العنصر a أنه قابل للقلب من اليمين في $\mathcal{R}$ إذا وجد عنصر وليكن $d \in \mathcal{R}$ بحيث يحقق العلاقة $a.d = 1$ (أي يوجد له مقلوب من اليمين).

٣- نقول عن العنصر a قابل للقلب (قلوب) في $\mathcal{R}$ إذا وجد عنصر وليكن $c \in \mathcal{R}$ بحيث $c.a = a.c = 1$ مقلوب a نرمز له بالرمز a^{-1}

أمثلة :

١- في حلقة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ جميع العناصر المغايرة للصفر والتي لأجل $x \neq \pm 1$ غير قابلة للقلب .
لنأخذ العدد $2 \in \mathbb{Z}$ نجد أن العدد 2 ليس له مقلوب في $\mathbb{Z}$

٢- ليكن لدينا المصفوفة $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ هل المصفوفة قابلة للقلب ؟

$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ / $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ وبالتالي فهي قلوبة.

طريقة ايجاد المقلوب للمصفوفة من المرتبة 2 تكون ب الحفاظ على عناصر القطر الثانوي ونبدل عناصر القطر الرئيس ونبدل الإشارة .

٣- نأخذ الحلقة Z ذات المقاس ٥
$Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$ هل هذه الحلقة قابلة للقلب ؟
جميع العناصر المغايرة للصفر قابلة للقلب (وضعنا ضرب لأنها قابلة للقلب)

$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

إذاً عناصر Z_5 قابلة للقلب .

٤- $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ هل المصفوفة قابلة للقلب ؟

$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ اذاً ليست قابلة للقلب اكتفينا بشرط واحد .

مبرهنة : لتكن $\mathcal{R}$ حلقة واحدية وليكن $a \in \mathcal{R}$ عنصر مغاير للصفر .

١- الشرط اللازم والكافي ليكون a عنصراً قابلاً للقلب في $\mathcal{R}$ هو ان يكون قابل للقلب من اليمين ومن اليسار في آن واحد .

٢- إذا كان العنصر a قابلاً للقلب في $\mathcal{R}$ فهو وحيد او مقلوبه وحيد .

البرهان:

١) **لزوم الشرط**: لنفرض أن a عنصراً قابلا للقلب في $\mathcal{R}$ فيوجد له مقلوب وليكن $c \in \mathcal{R}$

ويكون مغايراً للصفر ويحقق الشرط التالي $c.a = a.c = 1$

هذا يدل على أن الشرط محقق أي أن العنصر a قابل للقلب من اليمين واليسار .

كفاية الشرط: لنفرض أن a عنصراً قابلاً للقلب من اليمين واليسار في $\mathcal{R}$ عندئذٍ يوجد عناصر

b, d مغايرة للصفر تحقق الشروط التالية $b.a = 1$ وَ $a.d = 1$ سوف نبرهن أن $b = d$

يمكن أن نكتب أن $b = b.1 = b(a.d) = (b.a)d = 1.d = d \Leftarrow$ إن العنصر a قابل للقلب.

٢) بفرض أن a عنصراً قابلاً للقلب في $\mathcal{R}$ ولنفرض أن العنصرين v, u مقلوب للعنصر a في $\mathcal{R}$ في هذه الحالة يتحقق أن $u.a = a.u = 1 \ , \ v.a = a.v = 1$

يجب أن نبرهن أن $v = u$

$$u = 1.u = (v.a)u = v(a.u) = v.1 = v$$

أي أن مقلوب العنصر a هو وحيد .

تعريف : إذا كانت $\mathcal{R}$ حلقة واحدية فإن واحد الحلقة هو عنصر قابل للقلب .

نرمز لمجموعة العناصر القابلة للقلب في $\mathcal{R}$ بالرمز $U(\mathcal{R})$.

مبرهنة : لتكن $\mathcal{R}$ حلقة واحدية إن مجموعة العناصر القابلة للقلب في $\mathcal{R}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب في $\mathcal{R}$.

البرهان : **فكرة البرهان (يجب التحقق من شروط الزمرة ال ٤ وذلك بفرض مجموعة والتحقق بأنها غير خالية اولاً)**

بفرض أن $U(\mathcal{R})$ مجموعة العناصر القابلة للقلب في $\mathcal{R}$ وبما أن الحلقة واحدية وانه الواحد هو عنصر قابل للقلب فإن $1 \in U(\mathcal{R})$ هذا يعني أن $\emptyset \neq U(\mathcal{R})$.

- ليكن $a, b \in U(\mathcal{R})$ اذاً لهما مقلوب حيث $a^{-1}, b^{-1} \in \mathcal{R}$ اذاً

$$a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1 \quad , b.b^{-1} = b^{-1}.b = 1$$

والأن لنبرهن أن $a.b \in U(\mathcal{R})$ **(اذا استطعنا أن نوجد مقلوب العنصر $a.b$ فيكون $\mathbf{a.b \in U(\mathcal{R})}$).**

$$(a.b).(b^{-1}.a^{-1}) = a\,\underbrace{(b.b^{-1})}_{1}\,a^{-1} = a.a^{-1} = 1$$

$$(b^{-1}.a^{-1}).(a.b) = b^{-1}\,\underbrace{(a.a^{-1})}_{1}\,b = b^{-1}.b = 1$$

ومنه $\mathbf{a.b \in U(\mathcal{R})}$.

أي أن العنصر $a.b$ له مقلوب هو $b^{-1}.a^{-1}$ وبالتالي فعملية الضرب هي عملية داخلية .

- وإن $U(\mathcal{R})$ عملية تجميعية لأن $U(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$
- كما أنه يوجد لكل عنصر من المجموعة $U(\mathcal{R})$ عنصر محايد هو واحد الحلقة نفسه .
- لنبرهن أن لكل عنصر من المجموعة $U(\mathcal{R})$ يوجد مقلوب .

ليكن $c \in U(\mathcal{R})$ عندئذٍ العنصر c له مقلوب هو $c^{-1} \in \mathcal{R}$ $\Longleftarrow$ $c.c^{-1} = c^{-1}.c = 1$

أي أنه يوجد للعنصر c مقلوب هو $c^{-1} \in U(\mathcal{R})$ اذاً المجموعة $U(\mathcal{R})$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب وهو المطلوب .

انتهت المحاضرة

إعداد: لبنى الطون – محمد فهمي القاضي – أحمد ابو التوت