فريق : سيريا ماث

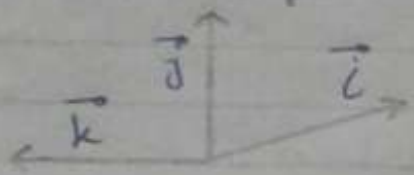
المحاضرة الرابعة ::

٢٠١٧/ ٢/١٤

3- تحليل المتجهات ومبادئ الهندسة التفاضلية ٤ -

١- الجداء الشعاعي (الخارجي)

ليكن $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ شعاعان غير صفريان وغير متوازيان فإن $\vec{a} \wedge \vec{b}$ هو شعاع يحقق الخصائص التالية



١) $\vec{a} \wedge \vec{b}$ عمودي على كل من $\vec{a}$ ، $\vec{b}$

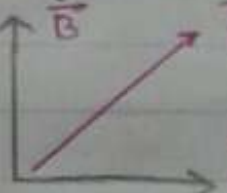
٢) طوله $|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi$

$\varphi < (\vec{a}, \vec{b})$

مثال: أشعة الواحدة $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ ، $\vec{k}$ فإن $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$

حيث $\vec{k}$ عمودي على كل من $\vec{i}$ ، $\vec{j}$

ملاحظة: إذا كان أحد المتجهين $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ معدوماً فإن $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$



نتائج:

أن طول شعاع الجداء الشعاعي الخارجي هو مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على الشعاعين.

$$|\vec{A} \wedge \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \sin\theta$$

حيث $|\vec{B}| \sin\theta = h$ الارتفاع

$$|\vec{A} \wedge \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot h$$

$$|\vec{A} \wedge \vec{B}| = S$$

مساحة متوازي الأضلاع

ملحوظة:
الجداء الخارجي ⇐ نتيجته شعاع
الجداء الداخلي ⇐ نتيجته عدد

Scanned by CamScanner

مساحة المثلث الذي ضلعان $\vec{A}, \vec{B}$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{A} \wedge \vec{B}|$$

♥ ملاحظة:

إذا كان $\vec{A}(a_1, b_1, c_1)$ ، $\vec{B}(a_2, b_2, c_2)$ فيكون:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

♥ حل الوظائف في المحاضرات السابقة:

مثال:

ليكن لدينا الشعاع $\vec{AB}$ حيث $A(x_1, y_1, 3_1)$ ، $B(x_2, y_2, 3_2)$ ، ليكن $D(-1, 0, 2)$ ، $C(3, 4, 7)$ مركباته $\vec{CD}$ الشعاع

1) أوجد الشعاع الذي يضاعف الشعاع $\vec{CD}$

ب) أوجد حامل مجموع الشعاع $\vec{AB} + \vec{CD}$ معادلته $(x, y, 3)$

ج) متى يكون $\vec{AB} = 3\vec{CD}$ (متلازمة الضعف)

الحل:

$$\vec{V} = 2\vec{CD} \quad (1)$$

$$\vec{CD} = (x_D - x_C, y_D - y_C, 3_D - 3_C)$$

$$= (-4, -4, -5)$$

$$2\vec{CD} = (-8, -8, -10)$$

ب) $\vec{AB} + \vec{CD}$

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, 3_2 - 3_1)$$

$$\vec{CD} = (-4, -4, -5)$$

$$\vec{AB} + \vec{CD} = x_2 - x_1 - 4, y_2 - y_1 - 4, 3_2 - 3_1 - 5)$$

Scanned by CamScanner

$$|\vec{AB}+\vec{CD}| = \sqrt{(x_2-x_1-4)^2+(y_2-y_1-4)^2+(3_2-3_1-5)^2}$$

$$\vec{AB} = 3\vec{CD} \quad (4$$

$$(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ 3_2-3_1)$$
$$(-12,\ -12,\ -15)$$

$$x_2-x_1 = -12$$
$$y_2-y_1 = -12$$
$$3_2-3_1 = -15$$

البرهان:

اثبت أن الارتفاعات تتلاقى في نقطة واحدة

البرهان

ليكن ABC مثلث، وليكن h نقطة تلاقي الارتفاعين النازلين من A و B

$$\vec{Ah}\cdot\vec{BC} = 0 \quad \text{و أن}$$
$$\vec{Bh}\cdot\vec{AC} = 0$$

لبرهن أن $\vec{Ch} \perp \vec{AB}$

الحل:

$$\vec{Ch} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{AB}\cdot\vec{Ch} = 0$$
$$\vec{AB} = \vec{Ah} - \vec{Bh} \Leftarrow \vec{AB} + \vec{Bh} = \vec{Ah}$$
$$\vec{AC} = \vec{Ah} - \vec{Ch} \Leftarrow \vec{AC} + \vec{Ch} = \vec{Ah}$$
$$\vec{BC} = \vec{Bh} - \vec{Ch} \Leftarrow \vec{BC} + \vec{Ch} = \vec{Bh}$$
$$\vec{Ah}\cdot\vec{BC} = \vec{Bh}\cdot\vec{AC}$$
$$\vec{Ah}(\vec{Bh}-\vec{Ch}) = \vec{Bh}\cdot(\vec{Ah}-\vec{Ch})$$
$$\vec{Ah}\cdot\vec{Bh} - \vec{Ah}\cdot\vec{Ch} = \vec{Bh}\cdot\vec{Ah} - \vec{Bh}\cdot\vec{Ch}$$
$$\vec{Ah}\cdot\vec{Ch} = \vec{Bh}\cdot\vec{Ch}$$
$$\vec{Ah}\vec{Ch} - \vec{Bh}\vec{Ch} = 0$$
$$\vec{Ch}(\vec{Ah}-\vec{Bh}) = 0 \Rightarrow \vec{Ch}\cdot\vec{AB} = 0$$
$$\Rightarrow \vec{Ch} \perp \vec{AB} \Rightarrow$$

الارتفاعات تتلاقى في نقطة واحدة.

Scanned by CamScanner

تمرين: أوجد مساحة المثلث الذي تقع رؤوسه في النقاط التالية
$A(2,5,0)$ $B(11,3,8)$ $C(5,-1,11)$

الحل:

$$\vec{AB} = (9,-2,8)$$
$$\vec{AC} = (3,-6,11)$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & -2 & 8 \\ 3 & -6 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= 26\vec{i} + 75\vec{j} - 48\vec{k}$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}|$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{(26)^2 + (75)^2 + (-48)^2}$$

اعداد: جيهان مصطفى
فريق: سيريامات

Scanned by CamScanner