نظري

◄ دكتور المادة: ملك مارديني

◄المحاضرة الثالثة

عنوان المحاضرة : معادلة لوجندر

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـسوف نقوم بحل تمارين عن معادلات تفاضلية بجوار نقطة

٢ـمعادلة لوجندر من المرتبة K

والآن لنبدأ أصدقائي ☺

تمرين : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية بجوار النقطة $x_0 = 0$

$$\mathbf{(x-1)y'' - xy' + y = 0}$$

النقطة $\mathbf{x_0 = 0}$ هي نقطة عادية (يمكن التحقق من ذلك بسهولة) ومنه

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0$$

نبحث عن الحل العام من الشكل :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \qquad y' = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}$$

ثم نعوض $y \,\&\, y'\&y''$ في المعادلة الأصلية بعد نشرها <=

$$xy'' - y'' - xy' + y = 0$$

$$x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-1}}_{\text{متسلسلة(١)}} - \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}}_{\text{متسلسلة(٢)}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^n}_{\text{متسلسلة(٣)}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n}_{\text{متسلسلة(٤)}} = 0$$

في المتسلسلة رقم (١) نبدل كل n ب $(n+1)$

في المتسلسلة رقم (٢) نبدل كل n ب $(n+2)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nC_{n+1}\, x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)C_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n\, C_n\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

نوجد الحدود الدنيا حيث أكبر حد هو $n = 1$ وبالتالي نفك من المتسلسلات الحد $n = 0$

$$(-2)(1)C_2 + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)(n)C_{n+1} - (n+2)(n+1)C_{n+2} - nC_n + C_n]x^n = 0$$

وبالمطابقة $-2C_2 + C_0 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{C_0}{2}$

$$n(n+1)C_{n+1} - (n+1)(n+2)C_{n+2} + (1-n)C_n = 0$$

$$C_{n+2} = \frac{[n(n+1)C_{n+1} + (1-n)C_n]}{(n+1)(n+2)} : n \geq 1 \dots\dots\dots (\#)$$

لدينا $C_2 = \frac{C_0}{2}$

$$n=1 \xrightarrow{\text{نعوض في}(\#)} C_3=\frac{2C_2}{6}=\frac{C_0}{3!}$$

$$n=2 \xrightarrow{\text{نعوض في}(\#)} C_4=\frac{6C_3-C_2}{4.3}=\frac{\frac{C_0}{2}}{4.3}=\frac{C_0}{4!}$$

$$n=3 \xrightarrow{\text{نعوض في}(\#)} C_5=\frac{C_0}{5!} \qquad n=4 \xrightarrow{\text{نعوض في}(\#)} C_6=\frac{C_0}{6!}$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\ldots\ldots\ldots+C_nx^n=$$

$$C_0+C_1x+\frac{C_0}{2!}x^2+\frac{C_3}{3!}x^3+\ldots\ldots\ldots$$

$$\rightarrow y=\underbrace{C_1x}_{\text{حل خاص}}+C_0\left[1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots\right]$$

(حل خاص ثاني)

نلاحظ أنه عبارة عن منشور تايلور ل e^x لكن ينقص الحد $n=1$ أي x وبالتالي الحل هو e^x-x

$$y=C_1x+C_0(e^x-x)=(C_1-C_0)x+C_0e^x$$

تمرين آخر:

أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية على شكل سلسلة قوى ل x حيث القوة الخاصة بجوار النقطة $x_0=0$

$$(x^2-1)y''+3xy'+xy=0$$

نلاحظ أن النقطة $x_0=0$ هي نقطة عادية لذلك نقسم على أمثال y'' طرفي المعادلة

$$y''+\frac{3x}{(x^2-1)}y'+\frac{x}{(x^2-1)}y=0$$

Syria Math Team

والحل العام من الشكل

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n \qquad y'=\sum_{n=1}^{\infty}nC_nx^{n-1} \qquad y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_nx^{n-2}$$

(نعوض بالمعادلة التي هي $x^2y''-y''+3xy'+xy=0$) نجد ما يلي :

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_nx^n}_{(1)}-\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_nx^{n-2}}_{(2)}+\underbrace{3\sum_{n=1}^{\infty}C_nx^n}_{(3)}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+1}}_{(4)}=0$$

في (٢) نبدل كل n ب (n+2) &&& في (٤) نبدل كل n ب (n-1)

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)C_{n+2}x^n+3\sum_{n=1}^{\infty}C_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}C_{n-1}x^n=0$$

نلاحظ أن أكبر حدود المتسلسلات السابقة(حد البداية) هو $n=2$ بالتالي نوحد الحدود ننشر الحدود التي أقل من $n=2$ ومنه

$$-(2)C_2-6C_3x+3C_1x+C_0x$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}[n(n-1)C_n-(n+1)(n+2)C_{n+2}+3nC_n+C_{n-1}]x^n=0$$

وبالمطابقة نجد أن $-2C_2=0\rightarrow C_2=0$

$$-6C_3+3C_1+C_0=0\rightarrow C_3=\frac{3C_1+C_0}{6}=\frac{C_1}{2}+\frac{C_0}{6}$$

$$n(n-1)C_n-(n+1)(n+2)C_{n+2}+3nC_n+C_{n-1}=0$$

$$-(n+1)(n+2)C_{n+2}+nC_n(n+2)+C_{n-1}=0\rightarrow$$

$$C_{n+2} = \frac{[n(n+2)C_n + C_{n-1}]}{[(n+1)(n+2)]} : n \geq 2$$

لدينا ما يلي $C_2 = 0 \ \&\& \ C_3 = \frac{C_1}{2} + \frac{C_0}{6}$ ومنه ....

$$n = 2 \to C_4 = \frac{8C_2 + C_1}{4.3} = \frac{C_1}{12} \ \&\& \ n = 3 \to C_5 = \frac{15C_3 + C_2}{5.4} = \frac{3C_1}{8} + \frac{C_0}{8}$$

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots\dots. + C_n x^n$$

$$= C_0 + C_1 x + \frac{C_1}{2}x^3 + \frac{C_0}{6}x^3 + \frac{C_1}{12}x^4 + \frac{3C_1}{8}x^5 + \frac{C_0}{8}x^5 + \dots..$$

$$\overset{\text{وبالتالي}}{\Longrightarrow} y = C_0 \underbrace{\left[1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{8} + \dots..\right]}_{\text{حل خاص أول}} + C_1 \underbrace{\left[x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{3x^5}{8} + \dots\dots\dots.\right]}_{\text{حل خاص ثاني}}$$

وبالتالي الحل العام هو تركيب خطي للحلين الخاصين

والآن لنبدأ مع معادلة لوجندر من المرتبة k ♥♥♥♥♥♥♥:

وتكون معادلة صديقنا لوجندر من الشكل :

$$\left(x^2 - 1\right)y'' + 2xy' - k(k+1)y = 0$$

وحلها بجوار النقطة $x_0 = 0$ (يمكننا بسهولة التحقق أن $x_0 = 0$ نقطة عادية)

من الشكل :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n \ \& \ y' = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} \ \& \ y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^n - k(k+1)\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^n - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)C_{n+2}x^n}_{\text{نبدل كل } n \text{ ب } (n+2)} + 2\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^n - k(k+1)\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

ومنه ننشر الحدود الدنيا حتى الحد $n=2$

$$-(1)(2)C_2 - (2)(3)C_3 x + 2C_1 x - k(k+1)C_0 - k(k+1)C_1 x$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}[n(n-1)C_n - (n+1)(n+2)C_{n+2} + 2nC_n - k(k+1)C_n]x^n = 0$$

بالمطابقة نجد......

أولاً: الثوابت معدومة $-2C_2 - k(k+1)C_0 = 0 \rightarrow C_2 = \frac{-k(k+1)}{2}C_0 \rightarrow C_2 = \frac{-k(k+1)}{2!}C_0$

ثانياً: أمثال x تساوي الصفر أي $-6C_3 + 2C_1 - k(k+1)C_1 = 0 \rightarrow C_3 = -\frac{(k-1)(k+2)}{3!}C_1$

ثالثاً: أمثال x^n معدومة $-(n+1)(n+2)C_{n+2} + [n(n+1) + 2n - k(k+1)]C_n = 0$

$$-(n+1)(n+2)C_{n+2} + (n-k)(n+k+1)C_n = 0$$

$$C_{n+2} = \frac{(n+k+1)(n-k)}{(n+1)(n+2)}C_n$$

$$n = 2 \rightarrow C_4 = \frac{(3+k)(2-k)}{4.3}C_2 \rightarrow C_4 = \frac{(3+k)(2-k)}{4.3}.\left(\frac{-k(k+1)}{2!}C_0\right)$$

$$= -\frac{(3+k)(2-k)(1+k)(k)}{4!}C_0$$

$$C_5 = \frac{(4+k)(3-k)(2+k)(1-k)(k)}{5!}C_1$$

$$C_6 = -\frac{(5+k)(4-k)(3+k)(2-k)(1+k)(k)}{6!}C_2$$

بذلك يتم المطلوب

انتهت المحاضرة

إعداد: محمد شهلا – فادي الشريطي – مهيار طعمه