تطبيقات نظرية الفئات: محاضرة «1»

* تعريف الفئة: كل مجموعة صف وليس كل صف مجموعة.

تعريف: نقول أنه لدينا فئة $\mathcal{L}$ إذا كان لدينا:

1) صف أشياء $ob(\mathcal{L})$ ونرمز لعناصره $A, B, C, \ldots$ وتسمى أشياء الفئة.

2) صف المورفيزمات نرمز له بـ $Mor(\mathcal{L})$ و يتألف من الأسهم (المورفيزمات):

$$(\forall A,B \in ob(\mathcal{L})) : A \to B$$

الصف ليس بالضرورة أن يكون موجود بين كل شيئين

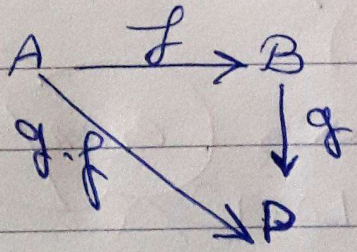
وتحققان معاً الشروط الآتية:

* $\forall A,B \in ob(\mathcal{L}) ; \mathcal{L}(A,B) = Hom(A,B)$ تشكل مجموعة.

* تعميم: لأجل أي $A,B,D \in ob(\mathcal{L})$ يوجد تطبيق:

$$(f,g) \mapsto g \cdot f$$

يسمى تركيب المورفيزمات:



وتحقق الخاصة التجميعية:

$$\forall f,g,h \in Mor(\mathcal{L}) ; (f.g).h = f.(g.h)$$

* أياً كان $A \in ob(\mathcal{L})$ يوجد المورفزم الطابق:

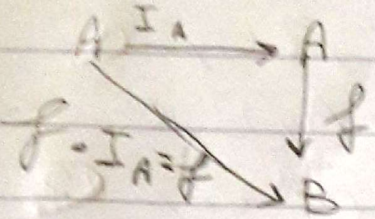
SABBAGH STATIONERY

Scanned by CamScanner

يوجد لكل $I_A : A \to A$

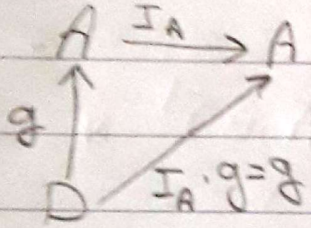
$f \in \mathcal{L}(A,B)$ ولكل $B \in ob(\mathcal{L})$ فإن:

$f \cdot I_A =$



وأيضاً لكل $D \in ob(\mathcal{L})$ ولكل $g \in \mathcal{L}(D,A)$

فإن: $I_A \cdot g = g$



* إذا كان $A, B, A', B' \in ob(\mathcal{L})$

حيث $(A,B) \neq (A',B')$ فإن:

$\mathcal{L}(A,B) \cap \mathcal{L}(A',B') = \emptyset$

set δ فئة المجموعات نمثلها example (1)

أشياءها مجموعات مورفزماتها التطبيقات.

$f : A \to B$ (حيث) $\subset A \times B$ ex2

(3) فئة الزمر G أشياءها زمر مورفزماتها تماثلات زمرية.

Scanned by CamScanner

④ فئة الزمر التبديلية مورفيزماتها التطبيقات الزمرية.

⑤ فئة الحلقات مورفيزماتها التطبيقات الحلقية.

⑥ فئة المودولات:

الفئة الجزئية الشيء أرشيائها X مورفيزماتها: $I_X : X \longrightarrow X$

علاقة الكارثية $\mathcal{F} = \{(2,2)\}$ ، $X = \{2\}$

الفئة ثنائية الشيء أرشيائها $X=Y$ مورفيزماتها:

$f : X \longrightarrow Y$ ، $I_Y : X \longrightarrow Y$ ، $I_X : X \longrightarrow X$

نتيجة لتكن $\mathcal{L}$ فئة عندئذ أيكان $X \in ob(\mathcal{L})$ فإن I_X وحيد.

- لنفرض أن I_X و $I'_X : X \longrightarrow X$

كلاهما مورفزم وطابقه

$$I_X = I_X \cdot I'_X = I'_X$$

... الفئة الجزئية:

لتكن $\mathcal{L}$ فئة نقول أنه $\mathcal{L}'$ تشكل فئة جزئية في $\mathcal{L}$ إذا حققت:

(يسمى جزء ليس احتواء)

① $ob(\mathcal{L}') \subset ob(\mathcal{L})$

② $\mathcal{L}'(A,B) \subseteq \mathcal{L}(A,B)$

③ المورفيزمات الطابقة في $\mathcal{L}'$ هي ذاتها المورفيزمات الطابقة في $\mathcal{L}$.

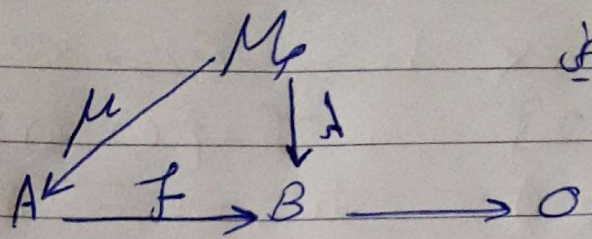
④ عملية تركيب المورفيزمات في $\mathcal{L}'$ هي ذاتها عملية تركيب المورفيزمات في $\mathcal{L}$.

SABBAGH STATIONERY

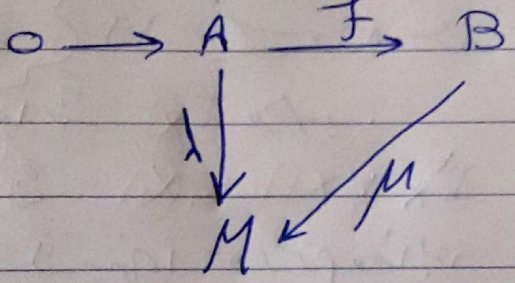
Scanned by CamScanner

- الفئة الثنوي:

$f \cdot \mu = \lambda$



رسم تخطيطي



أفقي

- لتكن $\mathcal{L}$ فئة نقول أنّ $\mathcal{L}^\circ$ فئة ثنوية للفئة $\mathcal{L}$ إذا كان:

① $ob(\mathcal{L}^\circ) = ob(\mathcal{L})$

② $\forall A, B \in ob(\mathcal{L})$

$$\mathcal{L}^\circ(A,B) = \mathcal{L}(B,A)$$

وهذين الشرطين تحققان كل شروط الفئة.

ونظرية تحقق هذه الشروط لأجل:

$fg \;/\; g.f$

#

Scanned by CamScanner