- المحاضرة الثانية: { تمرين سوبياماث }

تم في هذه المحاضرة إنارة المحاضرة الأولى ومن ثم أكملت في إثبات بعض القواعد، وحل بعض مثالها رياضيا.

إعداد الطالبتين: دوركي السيخ
حلال الهواري

- مفهوم التكامل غير المحدد:

إذا كان f تابعا معرفا ومستمرا على مجال $I \subseteq R$ وكان $F(x)$ هي مجموعة التوابع الأصلية لـ f في I يسمى التكامل غير محدد لـ f بالمكتوب:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

- خواص التكامل غير المحدد:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C$$

$$\int \alpha f(x)\,dx \mp \beta g(x)\,dx = \alpha \int f(x)dx \mp \beta \int g(x)dx$$

- إثبات بعض القواعد:

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}\,a^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}\,a^x + C$$

$$\int e^{\ln a^x}\,dx = \int e^{x \ln a}\,dx$$

Scanned by CamScanner

$$= \int e^{x \ln a} \frac{\ln a}{\ln a} dx$$

$$= \frac{1}{\ln a} \int e^{x \ln a} \ln a \, dx = \frac{1}{\ln a} \int e^{\ln a^x} \ln a \, dx$$

$$= \frac{1}{\ln a} \cdot e^{\ln a^x} + c$$

$$= \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

$y = \arcsin x$

$x = \sin y$

$1 = \cos y \cdot y'$:نشتق

$$y' = \frac{1}{\cos y} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \quad ; \sin y = x$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y = \int y' \, dx$$

$$\Downarrow$$

$$\arcsin x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + c$$

$y = \arctan x$

$x = \tan y$

$1 = (1 + \tan^2 y) y'$

حوزاييك

Scanned by CamScanner

$$y' = \frac{1}{1+\tan^2 y} \quad ; \quad \tan y = x$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = \int y' \, dx \quad ; \quad y = \arctan x$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

بعض التمارين على القواعد في حساب التكاملات:

1) $\int \tan^2 x \, dx$

2) $\int \frac{2}{3\sqrt{x}} \, dx$

3) $\int \sin^3 x \, dx$

4) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} \, dx$

5) $\int x\sqrt{x-1} \, dx$

6) $\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$

7) $\int \frac{x^2}{(x^3+8)^3} \, dx$

8) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$

9) $\int 2^x \cdot (3^2)^x \cdot (5^3)^x \, dx$

Scanned by CamScanner

الحل:

1) $\int \tan^2 x \, dx$

$$\int 1 + \tan^2 x - 1 \, dx = \int 1 + \tan^2 x - \int 1 \, dx$$

$$= \tan x - x + c$$

2) $\int \frac{2}{3\sqrt{x}} \, dx$

$$\int \frac{2}{3 x^{\frac{1}{2}}} \, dx = \int \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{2}} \, dx$$

$$= \frac{2}{3} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt{x} + c$$

3) $\int \sin^3 x \, dx$

$$= \int \sin x (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$= \int \sin x - \sin x \cos^2 x \, dx$$

$$= \int \sin x \, dx + \int -\sin x \cos^2 x \, dx$$

$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

Scanned by CamScanner

4) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\, dx$

$\int (2x+1)(x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}\, dx$

$= 2\sqrt{x^2+x+1} + C$

5) $\int x\sqrt{x-1}\, dx$

$\int x(x-1)^{\frac{1}{2}}\, dx$

$\int (x-1)(x-1)^{\frac{1}{2}} + 1\, dx$

$= \int (x-1)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{3}{2}}\, dx$

$= \int (x-1)^{\frac{1}{2}}\, dx + \int (x-1)^{\frac{3}{2}}\, dx$

$= \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C$

$= \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + C$

6) $\int \sin^3 x \cos x\, dx$

$= \frac{\sin^4 x}{4} + C$

Scanned by CamScanner

7) $\int \frac{x^2}{(x^3+8)^3}\,dx$

$= \int x^2 (x^3+8)^{-3}\,dx$

$= \int \frac{1}{3} 3x^2 (x^3+8)^{-3}\,dx$

$= \frac{1}{3}\int 3x^2 (x^3+8)^{-3}\,dx$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{(x^3+8)^{-2}}{-2}\right) + c$

$= \frac{-1}{6(x^3+8)^2} + C$

8) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$

$= \int \frac{(1-x)^2}{x^2}\,dx = \int \frac{1-2x+x^2}{x^2}\,dx$

$= \int \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1\,dx$

$= -\ln x^2 - 2\ln|x| + x + C$

Scanned by CamScanner

9) $\int 2^x (3^2)^x (5^3)^x \, dx$

$\int 2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^{3x} \, dx$

$= \int e^{\ln 2^x} \cdot e^{\ln 3^{2x}} \cdot e^{\ln 5^{3x}} \, dx$

$= \int e^{x \ln 2} \cdot e^{2x \ln 3} \cdot e^{3x \ln 5} \, dx$

$= \int e^{x(\ln 2 \cdot 2\ln 3 \cdot 3\ln 5)} \, dx$

$= \int e^{x(\ln 2 \cdot \ln 3^2 \cdot \ln 5^3)} \, dx$

$= \int e^{x \ln(2 \cdot 3^2 \cdot 5^3)} \, dx$

$= \int e^{\ln(2 \cdot 3^2 \cdot 5^3)^x} \, dx$

$= \int (2 \cdot 3^2 \cdot 5^3)^x \, dx$

$= \frac{1}{\ln(2 \cdot 3^2 \cdot 5^3)} \cdot (2 \cdot 3^2 \cdot 5^3)^x + C$

طريق سيد ياماك

Scanned by CamScanner