المحاضرة الرابعة من جبر خطي ٣ — م. عبد المسيح ...

مبرهنة: (دون برهان)

- لا تتغير الحدودية المميزة لمؤثر خطي بتغير قاعدة الفضاء الشعاعي
- ليكن V مؤثر خطي $L: V \to V$ ولتكن A مصفوفة هذا المؤثر بالنسبة لقاعدة مرتبة G ولتكن A' مصفوفة هذا المؤثر لقاعدة مرتبة G' عندئذٍ $P_A(x) = P_{A'}(x)$

مثال على هذه المبرهنة بنص المحاضرة السابقة.

مبرهنة:

للمصفوفة المربعة ومنقولها نفس الحدودية المميزة.

$A \in M_n(F)$ و $P_A(x)$ حدوديتها المميزة

عندئذٍ $P_A(x) = P_{A^t}(x)$ و A^t منقول A

تذكرة: منقول مصفوفة هو مصفوفة أخرى أعمدتها أسطر الأولى وأسطرها أعمدة الأولى.

البرهان:

$$P_{A^t}(x) = \det(xI - A^t)$$

منقول المصفوفة الواحدية هو نفسها ؛ $I = I^t$

$$= \det(xI^t - A^t)$$

$(\lambda A + \mu B)^t = \lambda A^t + \mu B^t$ ؛

$$= \det[(xI - A)^t]$$

$\det A = \det A^t$ ؛

$$= \det(xI - A)$$

$$= P_A(x)$$

الحدودية الأصغرية:

تمهيد: إذا كان $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n$

وكانت A مصفوفة مربعة $A \in M_n(F)$ عندئذٍ

$f(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots a_n A^n$ مصفوفة مربعة

ملاحظة: ندعو A صفراً (جذراً) للحدودية $f(x)$

إذا كان $f(A) = 0$

مثال: ليكن $f(x) = (x-1)(x-3)$

$$= x^2 - 4x + 3$$

هل المصفوفة A صفر للحدودية؟

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = (A - 1I)(A - 3I)$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

مبرهنة :

$A \in M_n(F)$ بحيث $A \neq 0$ عندئذ يوجد عدد صحيح موجب r بحيث $1 \le r \le n^2$ حيث $\{I, A, A^2, \dots, A^{r-1}\}$ مستقلة خطياً لكن $\{I, A, A^2, \dots, A^{r-1}, A^r\}$ مرتبطة خطياً.

البرهان :

بما أن $M_n(F)$ فضاء شعاعي معرّف على F وبعده n^2 فإن المجموعة $\{I, A, A^2, \dots, A^{n^2}\}$ مرتبطة خطياً (لأن عدد عناصرها n^2+1 أكبر من بعد الفضاء)

ونعلم أن I مستقلة خطياً لأنها مؤلفة من عنصر وحيد غير صفري.

نأخذ $\{I, A\}$ إذا كانت مرتبطة خطياً نجد $A = \lambda I$ ويكون $r = 1$

وإذا كانت مستقلة خطياً نأخذ $\{I, A, A^2\}$ إذا كانت مرتبطة خطياً فإنه يوجد $a, b \in F$ حيث $A^2 = aA + bI$ ويكون $r = 2$. أما إذا كانت مستقلة خطياً نتابع الخطوات حتى نحصل على مجموعة $\{I, A, A^2, \dots, A^{r-1}\}$ مستقلة خطياً بينما $\{I, A, A^2, \dots, A^{r-1}, A^r\}$ مرتبطة خطياً.

وهذه العملية ممكنة لأن n^2 عدد منته و $r \le n^2$.

تعريف الحدودية الأصغرية لمصفوفة مربعة :

«لن نستخدم هذه الطريقة امتحانياً إلا إذا طُلِبَ صراحةً»

ليكن $A \in M_n(F)$ عندها نقول عن الحدودية الواحدية $q(x)$ إنها الحدودية الأصغرية للمصفوفة A إذا كانت $q(x)$ هي الحدودية ذات الدرجة الأصغر التي تقبل A صفراً لها ونرمز لها $q_A(x)$

Scanned by CamScanner

لا يجاوزها نجري الخطوات التالية:

1- أ، حد المجموعة $\{I, A\}$ اذا كانت مستقلة خطياً

$\Leftarrow A - \lambda I \Leftarrow A - \lambda I = 0$ وبالتالي تكون الحدودية

الأصغرية هي $q_A(x) = x - \lambda$

2- اذا كانت مستقلة خطياً نأخذ $\{I, A, A^2\}$

فإذا كانت مستقلة مرتبطة $\Leftarrow A^2 = aA + bI \;; \exists a b \in F$

ومنه $A^2 - aA - bI = 0$

ونتابع حتى نصل الى مجموعة $\{I, A, A^2, \ldots, A^{r-1}\}$

مستقلة خطياً ولكن $\{I, A, A^2, \ldots, A^r\}$ مرتبطة

أي يوجد $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ بحيث ليست جميعها

اصفار، $\lambda_0 I + \lambda_1 A + \ldots + \lambda_r A^r = 0$

نقسم الطرفين على λ_r

$$A^r + \frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r} A^{r-1} + \ldots + \frac{\lambda_1}{\lambda_r} A + \frac{\lambda_0}{\lambda_r} I = 0$$

$$\Rightarrow q_A(x) = x^r + a_{r-1} x^{r-1} + a_{r-2} x^{r-2} + \ldots + a_1 x + a_0 .$$

$$a_{r-1} = \frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r} \qquad a_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_r}$$

مثال (1): أوجد الحدودية الأصغرية للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\{I, A\}$ مستقلة خطياً.

SARAH.

$\{I, A, A^2\}$ مرتبطة خطياً لأن $A^2 = 0A + 4I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I$$

$$A^2 - 4I = 0 \Rightarrow q_A(x) = x^2 - 4$$

مثال (2) اوجد المتعددة الأصغرية للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\{I, A\}$ مستقلة خطياً

$\{I, A, A^2\}$ إذا وجد a, b تحقق $A^2 = aA + bI$

تكون مرتبطة خطياً

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a \\ -a & 3a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+b & 2a \\ -a & 3a+b \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a+b &= -1 \\ 2a &= 8 \\ -a &= -4 \\ 3a+b &= 7 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} a &= 4 \\ b &= -5 \end{aligned}$$

$$A^2 = 4A - 5I \Rightarrow A^2 - 4A + 5I = 0$$

$$q_A(x) = x^2 - 4x + 5$$

مثال (3) ادرس الحرية الأسرية للمصفوفة

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

① $\{I, B\}$ مستقلة خطيا

② $\{I, B, B^2\}$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -4 \\ 8 & 4 & -4 \\ 10 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = aB + bI$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & -4 \\ 8 & 4 & -4 \\ 10 & 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+b & a & -a \\ 2a & 2a+b & -a \\ 2a & 2a & b \end{pmatrix}$$

$b = a - 4$

$3a + b = 9 \Rightarrow 3a - 12 \Rightarrow a = 4$

$a = 3$ ×

مستقلة

③ $\{I, B, B^2, B^3\}$

$\cancel{A^3 = aA^2 + bA + cI}$

$B^3 = aB^2 + bB + cI$

$$\begin{pmatrix} 25 & 7 & -12 \\ 24 & 8 & -12 \\ 34 & 14 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9a+3b+c & 3a+b & -4a-b \\ 8a+2b & 4a+2b+c & -4a-b \\ 10a+2b & 6a+2b & -4a+c \end{pmatrix}$$

$3a+b=7$

$-4a-b=-12$

$-a=-5 \Rightarrow \boxed{a=5}$

$3{,}5+b=7 \Rightarrow 15+b=7 \Rightarrow \boxed{b=-8}$

$-4a+c=-16 \Rightarrow -4.5+16=-c$

$\Rightarrow \boxed{c=4}$

$B^3 = 5B^2 - 8B + 4I = 0$

$B^3 - 5B^2 + 8B - 4I = 0$

$q_B(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

((انتهت المرة))

إعداد: محمد انس الرزاز

أ. ريحان جلو.

ترقبوا سـبايث