14/3/2017 — المحاضرة "3"

مثال فئة الموديولات اليسارية فوق حلقة واحدية R

ولنرمز لها بالرمز $R\text{-mod} = R^{\mathcal{L}}$.

ليكن $u : A \to B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}$ حيث :

$A, B \in ob(R^{\mathcal{L}})$ ، الشروط الآتية متكافئة :

① u مونومورفيزم

② u متباين

الإثبات : $1 \Leftarrow 2$: نفرض u مونومورفيزم عندئذٍ :

$\forall x \in ob(R^{\mathcal{L}})$ فإن التطبيق :

$$\alpha : \mathcal{L}(x, A) \longrightarrow \mathcal{L}(x, B)$$

$$\alpha(f) = u \cdot f \quad , \forall f \in \mathcal{L}(x, A)$$

متباين

لنفرض جدلاً أنه u غير متباين عندئذٍ : $N = Ker(u) \neq 0$

إن N هو أحد الأشياء $(\mathcal{L})$ $N \in ob$ من أجل $x = N$

لنأخذ العنصرين $v_1, v_2 \in \mathcal{L}(N, A)$ (التشاكل) :

$v_1 : N \to A \quad , v_1(x) = 0 \quad \forall x \in N$

$v_2(x) = x \quad , \forall x \in N$

إن $v_1 \neq v_2$

من جهة أخرى ، إن $u \cdot v_1 , u \cdot v_2 \in \mathcal{L}(N, B)$.

لأنه تشاكل زمري

$\forall x \in N \; ; \; u \cdot v_1(x) = u(0) = 0$

$u \cdot v_2(x) = u(x) = 0$

$\forall x \in N \; ; \; u \cdot v_1(x) = u \cdot v_2(x)$

$$u.v_1 = u.v_2$$

$$\alpha.v_1 = \alpha.v_2 \Rightarrow \alpha(v_1) = \alpha(v_2)$$

وطالما كان α متباين نجد أنه $v_1 = v_2$ وهذا غير ممكن

ومنه u متباين.

$2 \Leftarrow 1$: لنفرض أن u متباين ولنفرض جدلاً أن α ليس متباين عندئذ يوجد $v_1, v_2 \in \mathcal{L}(X, A)$

بحيث: $v_1 \neq v_2$ وإن: $\alpha(v_1) = \alpha(v_2)$

ومنه: $u.v_1 = u.v_2$

عندئذ:

$$\forall x \in X \ , \ u.v_1(x) = u.v_2(x) \Rightarrow$$

$$u(v_1(x) - v_2(x)) = 0$$

$$\Rightarrow (v_1(x) - v_2(x)) \in Ker(u) = 0$$

$$v_1(x) = v_2(x) \quad \forall x \in X$$

وهذا غير ممكن $\Rightarrow v_1 = v_2$

ومنه α متباين وبالتالي u مونومورفيزم.

* الدوال:

لتكن $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ فئتين نقول أنه يوجد لدينا دالة مباشرة (موافق للتغيير): $F : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$

إذا وجد: 1- تطبيق أشياء:

$$F : ob(\mathcal{L}_1) \longrightarrow ob(\mathcal{L}_2)$$

$$\forall A \in ob(\mathcal{L}_1) \ , \ F(A) \in ob(\mathcal{L}_2)$$

2) تغطية مورفيزم بانة : $F: Mor(\mathcal{L}_1) \longrightarrow Mor(\mathcal{L}_2)$

بحيث لأجل كل مورفيزم $u: A \to B$ للفئة $\mathcal{L}_1$ فإنه :

$F(u): F(A) \longrightarrow F(B)$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_2$

$$\forall\ A, B \in ob(\mathcal{L}_1)$$

$$F_{A,B}: \mathcal{L}_1(A,B) \longrightarrow \mathcal{L}_2(F(A), F(B))$$

تحققان معاً الشروط الآتية :

$$\forall\ A \in ob(\mathcal{L}_1)\ ;\ F(I_A) = I_{F(A)}$$

$$\forall\ u, v \in Mor(\mathcal{L}_1)\ ;\ F(\cancel{u.v}) = F(v).F(u)$$

ونقول أنه يوجد لدينا دالة فئة غرسيا تبة (مخالف للتغيير):

$$F: \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$$

إذا وجد : لصيغ الأشياء : $F: ob(\mathcal{L}_1) \longrightarrow ob(\mathcal{L}_2)$

$$A \longmapsto F(A)$$

تغطية مورفيزمات : $F: Mor(\mathcal{L}_1) \longrightarrow Mor(\mathcal{L}_2)$

بحيث لأجل كل مورفيزم : $u: A \to B \in \mathcal{L}_1(A,B)$ فإنه :

$$F(u): F(B) \longrightarrow F(A) \in Mor(\mathcal{L}_1)$$

تحققان معاً :

1) $\forall A \in ob(\mathcal{L}_1)\ ;\ F(I_A) = I_{F(A)}$

2) $\forall\ u, v \in Mor(\mathcal{L}_1)\ ;\ F(u.v) = F(v).F(u)$

تمهيد ثلو (3) :

لتكن $\mathcal{L}$ فئة عندئذ لأجل كل $x \in ob(\mathcal{L})$ يوجد :

$h_x : \mathcal{L} \longrightarrow sets$: ① دالي مباشر

مصفلاك $h_x : \mathcal{L} \longrightarrow sets$: ② دالي غير مباشر

تطبيق أشياء :

$$\hat{h}_X : ob(\mathcal{L}) \longrightarrow ob$$

$$h_X : ob(\mathcal{L}) \longrightarrow ob(sets)$$

$$\forall A \in ob(\mathcal{L}) \;;\; h_X(A) = \mathcal{L}(X, A)$$

$$A = B \quad , \quad \mathcal{L}(X, A) = \mathcal{L}(X, B)$$

- تطبيق أمورفيزمات :

$$h_X : Mor(\mathcal{L}) \longrightarrow Mor(sets)$$

نأخذ كل مورفيزم من $u : A \longrightarrow B$ لنضع :

$$h_X(u) : h_X(A) \longrightarrow h_X(B)$$

$$h_X(u) : \mathcal{L}(X, A) \longrightarrow \mathcal{L}(X, B)$$

$$h_X(u)(v) = u \cdot v$$

1- ليكن $A \in ob(\mathcal{L})$

$$h_X(I_A) : \mathcal{L}(X, A) \longrightarrow \mathcal{L}(X, A)$$

$$\forall v \in \mathcal{L}(X, A) \;;\; h_X(I_A)(v) = I_A \cdot v = v$$

2- ليكن : $u : A \longrightarrow B$ ، $v : B \longrightarrow D$

$$h_X(v \cdot u) = h_X(v) \cdot h_X(u)$$

$$h_X(v \cdot u) : h_X(A) \longrightarrow h_X(D)$$

$$\forall f \in \mathcal{L}(X, A) : h_X(v \cdot u)(f) = (v \cdot u) \cdot f$$

$$= v \cdot (u \cdot f)$$

$$h_X(v) : h_X(B) \longrightarrow h_X(D)$$

$\mathcal{L}(X,B) \longrightarrow \mathcal{L}(X,D)$

$u \cdot f \in \mathcal{L}(X,B)$:إذن

$h_X(v)(u \cdot f) = v \cdot (u \cdot f)$

$h_X(u) : h_X(A) \longrightarrow h_X(B)$

$\mathcal{L}(X,A), \; \mathcal{L}(X,B)$

$f \in \mathcal{L}(X,A)$

$h_X(u)(f) = u \cdot f$

$h_X(v \cdot u)(f) = h_X(v) \cdot (u \cdot f)$

$= h_X(v)\left(h_X(u)(f)\right)$

$= \left(h_X(v) \cdot h_X(u)\right)(f)$

$h_X(v \cdot u) = h_X(v) \cdot h_X(u)$

3- نعرف $\hat{h}_X : \mathcal{L} \longrightarrow$ Sets من خلال:

① تطبيق أشياء: $\hat{h}_X : ob(\mathcal{L}) \longrightarrow ob(sets)$

$\hat{h}_X(A) = \mathcal{L}(A,X) \; ; \; \forall A \in ob(\mathcal{L})$

② تطبيق مورفيزمات: $\hat{h}_X : Mor(\mathcal{L}) \longrightarrow Mor(sets)$

ليكن $u : A \longrightarrow B$ مورفيزم الفئة $\mathcal{L}$ لنضع:

$\hat{h}_X(u) : \hat{h}_X(B) \longrightarrow \hat{h}_X(A)$

حيث: $\mathcal{L}(B,X) \longrightarrow \mathcal{L}(A,X)$

$\forall f \in \mathcal{L}(B,X), \; \hat{h}_X(u)(f) = f \cdot u$

ليكن $A \in ob(\mathcal{L})$ إذن:

$\hat{h}_X(I_A) : \hat{h}_X(A) \longrightarrow \hat{h}_X(A)$

$\forall f \in \mathcal{L}(A,X) ; \; \hat{h}_X(I_A)(f) = f \cdot I_A = f$

فإن $\Rightarrow \hat{h}_X(I_A) = I_{\mathcal{L}(A,X)} = I_{\hat{h}_X(A)}$

③ لنأخذ $u : A \to B$ ، $v : B \longrightarrow D$

$v.u : A \longrightarrow D$

$\hat{h}_X(v.u) : \hat{h}_X(D) \longrightarrow \hat{h}_X(A)$

$: \mathcal{L}(D,X) \longrightarrow \mathcal{L}(A,X)$

$\forall f \in \mathcal{L}(D,X);$

$\hat{h}(v.u)(f) = f(v.u) = (f.v).u$

$\hat{h}_X(v) : \hat{h}_X(D) \longrightarrow \hat{h}_X(B)$

$: \mathcal{L}(D,X) \longrightarrow \mathcal{L}(B,X)$

$\hat{h}_X(v)(f) = f.v$

$\hat{h}_X(u) : \hat{h}_X(B) \longrightarrow \hat{h}_X(A)$

$: \mathcal{L}(B,X) \longrightarrow \mathcal{L}(A,X)$

$f.v \in \mathcal{L}(B,X)$

$\hat{h}_X(u)(f.v) = (f.v).u$

$= \hat{h}_X(u).(\hat{h}_X(v))(f)$

ومنه كتطبيقات متساويات عند كل عنصر من المنطلق

ومنه متساويان $\Leftarrow$ ومنه:

$\hat{h}_X(v.u) = \hat{h}_X(u).\hat{h}_X(v)$

The end