

22-3-2017



◀ دكتور الماده: هدى الشماط

◀ المحاضرة الرابعة

نظري

عنوان المحاضرة: المتتاليات الجزئية في  $\mathbb{R}^n$ 

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- المتتاليات الجزئية في  $\mathbb{R}^n$ 

٢- كيف نولد متتالية جزئية من متتالية ما

٣- تعريف المجموعات المترابطة و المترابطة و التغطية

٤- الدوال لعدة متحولات (النهايات)

**المتتاليات الجزئية في  $\mathbb{R}^n$  :**لتكن  $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}^*}$  متتالية في  $\mathbb{R}^n$  ولتكن  $\{m_i\}_{i \in I}$  متتالية من الاعداد الطبيعية بحيث:

$$m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_k < \dots$$

عندئذ نسمي  $\{x_{m_i}\}$  بالمتتالية الجزئية من المتتالية  $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}^*}$ .- كيفية الحصول على متتالية جزئية من متتالية  $\{x_m\}$  ؟**أولاً :** نقوم باختيار عنصر من المتتالية الأصلية نضعه أول عنصر في المتتالية الجديدة .**ثانياً :** نختار عنصر آخر من المتتالية الأصلية بحيث نهمل جميع العناصر الموجودة قبل العنصر الأول

الذي اخترناه في الخطوة الأولى ونضعه ثاني عنصر في المتتالية الجديدة .

**ثالثاً :** نختار عنصر ثالث من المتتالية الأصلية بعد إهمال جميع العناصر الواقعة قبل العنصر الثاني الذي

اخترناه وهكذا ... نضعه في متتالية جديدة فنحصل على متتالية من الشكل

$$\{x_{m_i}\}$$

**مثال :** لتكن المتتالية  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$  و التي حدودها هي  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ 

و لنتبع الخطوات الموضحة قبل قليل :

أولاً : سنختار عنصر من المتتالية الأصلية ليكون العنصر الأول في المتتالية الجزئية التي سنشكلها لناخذ

مثلاً  $x_4 = \frac{1}{4}$  سيكون العنصر الأول في المتتالية الجزئية

ثانياً: سنختار عنصر ليكون عنصر ثانٍ في المتتالية الجزئية بحيث نهمل جميع العناصر التي تقع قبل  $x_2$  لنأخذ مثلاً العنصر  $x_9 = \frac{1}{9}$  ليكون العنصر الثاني

ثالثاً: نختار عنصر ثالث بحيث نهمل كل ما يسبق العنصر  $x_9$  لنأخذ مثلاً العنصر  $x_{16} = \frac{1}{16}$  وهكذا .... فنلاحظ أننا حصلنا على المتتالية

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots \quad : n > 1$$

و هي متتالية جزئية من المتتالية  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

**مبرهنة ( بدون برهان ):**

الشرط اللازم والكافي كي تكون المتتالية  $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}^*}$  في  $\mathbb{R}^n$  متقاربة من  $x$  في  $\mathbb{R}^n$  هو أن تتقارب  $\{x_{m_i}\}_{m_i \in \mathbb{N}^*}$  من  $x$  نفسها .

**مبرهنة: (نتيجة)**

إذا وجدت متتاليتين جزئيتين في  $\{x_m\}$  متقاربتين من نهايتين مختلفتين فإن المتتالية الأصلية  $\{x_m\}$  تكون متباعدة حتماً.

**مثال:** المتتالية  $\{(-1)^n\}$  في  $\mathbb{R}$  عندئذٍ :

$$-1, 1, -1, 1, \dots$$

ولنأخذ المتتاليتين الجزئيتين :

$$1, 1, 1, 1, 1, \dots$$

$$-1, -1, -1, -1, \dots$$

إن المتتالية الأولى متتالية ثابتة متقاربة من 1

و الأخرى متتالية ثابتة متقاربة من -1

إذاً وجد في المتتالية  $\{(-1)^n\}$  متتاليتين جزئيتين متقاربتين من نهايتين مختلفتين فالأصلية متباعدة حتماً

**متتالية كوشي (الأساسية):**

نقول عن المتتالية  $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  إنها متتالية كوشي في  $\mathbb{R}^n$  إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, m, k \geq n_\varepsilon \Rightarrow \|x_m - x_k\| < \varepsilon$$

**مبرهنة:** كل متتالية متقاربة في  $\mathbb{R}^n$  هي متتالية كوشي.

**الاثبات:** لتكن  $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  متتالية متقاربة من  $x$  في  $\mathbb{R}^n$ :

$$\forall \varepsilon > 0, \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, m \geq n_\varepsilon \Rightarrow \|x_m - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

نريد إثبات أن  $\|x_m - x_k\| < \varepsilon$  لذلك نضيف ونطرح منها  $x$ :

$$\|x_m - x_k\| = \|x_m - x + x - x_k\| \stackrel{\text{خواص القيمة المطلقة}}{\leq} \|x_m - x\| + \|x_k - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وبالتالي تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}: m, k \geq n_\varepsilon \Rightarrow \|x_m - x_k\| < \varepsilon$$

إذاً  $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  هي متتالية كوشي في  $\mathbb{R}^n$ .

**مبرهنة:** كل متتالية كوشي في  $\mathbb{R}^n$  تكون متقاربة.

**ملاحظة:** كل فضاء متري يحقق أن كل ممتالية كوشي فيه تكون متقاربة يدعى فضاءً تاماً

**التغطية:** لتكن  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  ولتكن  $\{u_i: i \in I\}$  جماعة من المجموعات المنتهية أو غير المنتهية،

نقول عن هذه الجماعة أنها تشكل تغطية لـ  $S$  إذا تحقق:

$$S \subseteq \bigcup_{i \in I} u_i$$

وتكون هذه التغطية **مفتوحة** إذا كانت الجماعة  $\{u_i: i \in I\}$  عبارة عن مجموعات مفتوحة.

**المجموعة المتراسة:** نقول عن  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  أنها مجموعة متراسة إذا حوت كل تغطية مفتوحة لـ  $S$  تغطية

جزئية منتهية.

**مثال:** لكن  $A = \{a_1 a_2, \dots, a_r\}$  مجموعة منتهية في  $\mathbb{R}^n$  ولكن  $\{u_i: i \in I\}$  تغطية لـ  $A$  أثبت أن

المجموعة  $A$  مجموعة متراسة.

**الحل:**

بما أن  $\{u_i: i \in I\}$  هي تغطية لـ  $A$  فإن  $A \subseteq \bigcup_{i \in I} u_i$

$$\forall a_i \in A \Rightarrow \exists u_j \in \bigcup_{i \in I} u_i, : a_i \in u_j$$

((قد ينتمي  $a_i$  لأي مجموعة من التغطية و ليس بالضرورة أن تنتمي للمجموعة ذات الدليل نفسه))

$$\text{و بالتالي } A = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \dots \cup \{a_r\} \subseteq \bigcup_{j=1}^r u_j \subseteq \bigcup_{i \in I} u_i$$

$$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{j=1}^r u_j \subseteq \bigcup_{i \in I} u_i$$

وجدنا تغطية جزئية  
منتهية في  
 $\bigcup_{i \in I} u_i$   
للمجموعة  $A$

### #نتيجة: كل مجموعة منتهية تكون مترابطة.

**مبرهنة هاين بوريل:** كل مجموعة مغلقة ومحدودة هي مترابطة أي  $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$  مترابطة  $\Leftrightarrow$  مغلقة محدودة .

**المجموعة المترابطة:** نقول عن المجموعة  $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$  بأنها غير مترابطة إذا وجدت مجموعتان  $u, v$  مفتوحتان غير خاليتين بحيث:

$$\begin{aligned} u \cap v &\neq \emptyset & u \cap S &\neq \emptyset & v \cap S &\neq \emptyset \\ (u \cap S) \cap (v \cap S) &= \emptyset \\ (u \cap S) \cup (v \cap S) &= S \end{aligned}$$

عندئذ نسمي  $u, v$  بفصل المجموعة  $S$ .

مثال: لتكن  $S = ]1,3[ \cup ]5,8[$  هل هي مترابطة؟

الحل: ليكن  $u = ]1,3[$  .  $v = ]5,8[$

$$\begin{aligned} u \cup S &= ]1,3[ & v \cap S &= ]5,8[ \\ (u \cap S) \cap (v \cap S) &= ]1,3[ \cap ]5,8[ = \emptyset \\ (u \cap S) \cup (v \cap S) &= ]1,3[ \cup ]5,8[ = S \end{aligned}$$

ومنه  $S$  غير مترابطة.

ملاحظة: المجموعة الوحيدة العنصر مع  $\mathbb{R}^n$  تكون مترابطة لأنني لا أستطيع إيجاد مجموعتين مفتوحتين تحققان ما سبق

**مبرهنة:** الشرط اللازم والكافي كي تكون  $S \subseteq \mathbb{R}$  مترابطة هو أن تكون  $S$  مجال (مغلق، مفتوح، نصف مغلق....).

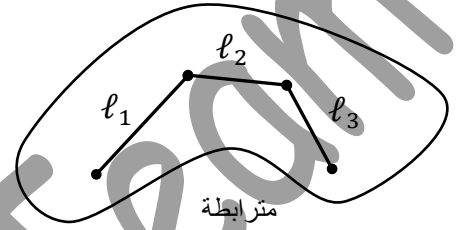
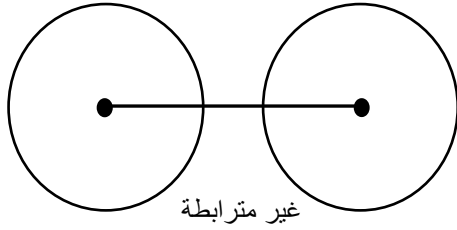
مثال:

إذا كانت  $S = [0,1] \cup [1,2]$  فإن  $S = [0,2]$  ومنه المجموعة  $S$  تشكّل مجال فهي مترابطة.  
 $S = [0,1] - [0, \frac{1}{2}] = ]\frac{1}{2}, 1]$  مترابطة لأنها مجال.  
 $S = [0,1] \cup [2,4]$  غير مترابطة لأنها ليست مجال.  
 $S = [0,1] - ]0,1[ = \{0,1\}$  غير مترابطة لأنها ليست مجال .

**مبرهنة ( بدون برهان )**: لتكن  $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$  الشرط اللازم والكافي لكي تكون المجموعة مترابطة هو

أن نصل بين أي نقطتين في  $S$  بخط مضع يقع بأكمله في  $S$

**أمثلة:** (المجموعة اليسرى تشكل دائرتين منفصلتين فإذا أخذنا نقطة من الأولى و نقطة من الثانية فلا يمكن وصلهما بخط مضع يقع بأكمله في  $S$ ).



**ملاحظة:**  $\mathbb{R}$  مترابطة و  $\mathbb{R}^n$  مترابطة.

معادلة أي قطعة مستقيمة طرفيها  $x, y$  هي من الشكل

$$L = \{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\}$$

نحصل على  $x$  بوضع  $t = 0$

نحصل على  $y$  بوضع  $t = 1$

-إذا كان لدينا مجموعة من النقاط :  $x_1, x_2, \dots, x_m$  هي عناصر من  $\mathbb{R}^n$  وكانت

$L_1, L_2, \dots, L_{m-1}$  هي القطع المستقيمة الواصلة بين هذه النقاط  $x_i$  و  $x_{i+1}$  حيث

$i = 1, 2, \dots, m-1$  عندئذ ندعو  $L_1, L_2, \dots, L_{m-1}$  بخط مضع يصل في  $x_1, x_2, \dots, x_m$

**نهايات الدوال الحقيقية لعدة متغيرات : لنأخذ :**

$f : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  دالة معرفة على مجموعة جزئية  $S$  من  $\mathbb{R}^n$  (( مجموعة تعريف ))

ولتكن  $x_0$  نقطة حدية لـ  $S$

نقول أن  $f(x)$  تسعى إلى نهاية محددة ولتكن  $A$  عندما  $x$  تسعى نحو  $x_0$  إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists \delta > 0 : 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

(الكتابة  $0 < \|x - x_0\|$  تكافئ أن  $x \neq x_0$  كنايةً عن أنها نقطة حدية).

**تعريف آخر (باستخدام المتتاليات):**

لتكن دالة حقيقة معرفة  $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ولتكن  $(x_0 \in S')$  (نقطة حدية لـ  $S$ ) عندئذ:

الشرط اللازم والكافي لكي تكون نهاية الدالة  $f(x)$  هي  $A$  عندما  $x$  تسعى إلى  $x_0$  هو أن يقابل كل متتالية  $\{x_m\}$  من  $S$  عناصرها مختلفة عن  $x_0$  و متقاربة من  $x_0$  متتالية  $\{f(x_m)\}$  و متقاربة من  $A$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$$

مثال : ليكن

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{x^3 \sin y}{x^2 + y^2}$$

أثبت أن  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$

الحل : نريد إثبات أن:

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists \delta > 0 : 0 < \|(x, y) - (0,0)\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^3 \sin y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

لدينا :

$$\left| \frac{x^3 \sin y}{x^2 + y^2} - 0 \right| \stackrel{|\sin y| \leq 1}{\leq} \frac{|x^3|}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 |x|}{x^2 + y^2} < \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} |x| = |x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y) - (0,0)\| < \delta$$

هدفنا أن نصل إلى علاقة ب  $\delta$  .

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists \delta = \varepsilon > 0 : 0 < \|(x, y) - (0,0)\| < \delta = \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{x^3 \sin y}{x^2 + y^2} \right| < \varepsilon$$

أي  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$

مثال :

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{\sin xy}{x^2 + y^2}$$

ادرس وجود (أي يمكن أي يوجد نهاية و ممكن لا) نهاية  $f(x, y)$   $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)}$

**الحل:** فكرة الحل: نأخذ متتاليتين من المنطق متقاربتان من النقطة  $(0, 0)$  و نثبت أن صورتيهما

متقاربتين من نهايتين مختلفتين.

نأخذ المتتالية  $(0,0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\sin \frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

نأخذ متتالية أخرى  $(0,0) \leftarrow \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) = \frac{\sin \frac{2}{n^2}}{\frac{5}{n^2}} = \frac{\sin \frac{2}{n^2}}{\frac{5}{2} \frac{2}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{5}$$

وجدنا متتاليتين من المنطق متقاربتين من  $(0,0)$  إلا أن صورتيهما متقاربتين من عددين مختلفين، فالنهاية المطلوبة غير موجودة.

**النتيجة**

**إعداد: منى شغل - سندس العص - نذير تيناوي**