نظري

◄ دكتور المادة: ملك ماردیني

◄المحاضرة الرابعة عنوان المحاضرة : حل المعادلات بجوار نقطة غير الصف

المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-إيجاد حل المعادلة التفاضلية بجوار نقطة $x_0 \neq 0$

٢-ملاحظة حول النقطة الشاذة

لنبدأ أصدقائي .....

ملاحظات

١ إذا طلب منا إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ في جوار النقطة $x_0 \neq 0$ عندئذ نجري الانسحاب $X = x - x_0$ والبحث عن حل عام من الشكل

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

وذلك بعد أن نكتب كلا من P, q, R حيث R هي الطرف الأيمن في حال كانت المعادلة غير متجانسة

إذا كانت المعادلة غير متجانسة بدلالة x نبدل كل x ب $(x - x_0)$ فنحصل على الحل العام للمعادلة بجوار $x_0 \neq 0$

٢ إن كل نقطة شاذة لحل المعادلة التفاضلية هي نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح.....

مثال

Syria Math Team

إن $y = C_1x + C_2x^2$ هو الحل العام للمعادلة $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$

ولكن $x_0 = 0$ هي نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية ولكنها ليست شاذة لحل المعادلة التفاضلية .

مثال آخر

$y = C_1x^2 + \frac{C_2}{x^2}$ هو حل للمعادلة $y" + \frac{1}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = 0$

ولكن $x = 0$ نقطة شاذة للحل وهي نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية.....

٣

عندما ننشر بقوى $(x - x_0)$ نميز حالتين :

١_ إذا كانت P, q كثيرات حدود بقوى $(x - x_0)$ أيضا عندئذ نضرب الحد العام للسلاسل بهذه القوى $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n$

٢_ إذا كانت P, q كثيرات حدود بقوى x عندئذ تكتب P, q بقوى $(x - x_0)$ على الشكل

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)^2 + \cdots\cdots\cdots$$

$$q(x) = \beta_0 + \beta_1(x - x_0) + \beta_2(x - x_0)^2 + \cdots\cdots\cdots$$

ثم بالفك والمطابقة بين الطرفين نحصل على الأمثال $\alpha_0, \alpha_1, \cdots\cdots \& \beta_0, \beta_1, \cdots\cdots\cdots$

ونحصل أيضا على نشري P, q بقوى $(x - x_0)$

والآن كيف يأتي السؤال امتحانياً؟؟؟؟؟؟؟؟

عبر عن كثير الحدود $x^2 + 1$ بشكل سلاسل قوى ل $(x - 1)$

السؤال:أوجد الحل العام في جوار $x = 1$

الحل:

Syria Math Team

أولاً سوف نفرض أن $P(x)=x^2+1$ ومنه

$$P(x)=x^2+1=\alpha_0+\alpha_1(x-1)+\alpha_2(x-1)^2$$

يجب أن نحصل على $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$ بالفك والمطابقة

$$=\alpha_0+\alpha_1x-\alpha_1+\alpha_2x^2-2\alpha_2x+\alpha_2$$

$$(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_1-2\alpha_2)x+\alpha_2x^2=x^2+1 \xrightarrow{\text{بالمطابقة}} \alpha_2=1$$

$$\alpha_1-2\alpha_2=0 \xrightarrow{\text{ومنه}} \alpha_1=2 \xrightarrow{\text{نعوض }\alpha_1\text{و}\alpha_2} \alpha_0-2+1=1\rightarrow\alpha_0=2$$

ومنه كثير الحدود $P(x)=2(x-1)+(x-1)^2+2$

٤ يبرهن على عدم إمكانية النشر في جوار النقطة الشاذة الغير النظامية.....

لإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الغير المتجانسة بقوى $(x-x_0)$ نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة ثم نوجد حل خاص للمعادلة الغير متجانسة نفك من المتسلسلة الحدود التي هي من درجة كثيرة الحدود R ثم نطابق ونوجد الأمثال.....

مثال

أوجد الحل العام المعادلة بجوار النقطة $x_0=0$: $y''+y=x^2+1$

هي معادلة تفاضلية غير متجانسة من المرتبة الثانية بحيث $x_0=0$ نقطة عادية إذاً نوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة $y''+y=0$

بحيث يكون الحل من الشكل :

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n \;\&\&\; y'=\sum_{n=1}^{\infty}nC_nx^{n-1} \;\&\&\; y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_nx^{n-2}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية ومنه:

Syria Math Team

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

والآن لنوحد القوى نبدل كل n ب $(n+2)$ في المتسلسلة الأولى

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)C_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

نلاحظ أن الحدود الدنيا موحدة ومنه

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)C_{n+2} + C_n\right] x^n = 0 \dots\dots (\$)$$

بما أن أمثال x^n معدومة فالعلاقة تكرارية ومنه نجد أن :

$$C_{n+2} = -\frac{C_n}{(n+1)(n+2)} \quad : n \geq 0$$

$$n = 0 \to C_2 = -\frac{C_0}{2} = -\frac{C_0}{2!} \;\&\&\; n = 1 \to C_3 = -\frac{C_1}{2.3} = -\frac{C_1}{3!}$$

$$n = 2 \to C_4 = -\frac{C_2}{4.3} = \frac{C_0}{4.3.2} = \frac{C_0}{4!} \;\&\&\; n = 3 \to C_5 = -\frac{C_3}{5.4} = \frac{C_1}{5!}$$

نعوض الثوابت في المعادلة التفاضلية ومنه :

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots..$$

$$y = C_0 + C_1 x - \frac{C_0}{2!} x^2 - \frac{C_1}{3!} x^3 + \frac{C_0}{4!} x^4 + \frac{C_1}{5!} x^5 - \frac{C_0}{6!} x^6 + \cdots.$$

$$y = C_0 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots\dots\right) + C_1 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \dots.\right)$$

Syria Math Team

$$\Rightarrow y = C_0.\cos(x) + C_1.\sin(x)$$

والآن نوجد حل خاص للمعادلة الغير المتجانسة $y'' + y = x^2 + 1$

الحل من الشكل

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \;\&\&\; y' = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} \;\&\&\; y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}$$

نكتب المعادلة ($) كما هي مع طرف ثاني

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)C_{n+2} + C_n\right] x^n = x^2 + 1$$

نفك من المتسلسلة أول ثلاث حدود (وذلك حسب درجة x في الطرف الأيمن) ومنه :

$$2C_2 + C_0 + 6C_3 x + C_1 x + 12C_4 x^2 + C_2 x^2 +$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} [(n+1)(n+2)C_{n+2} + C_n] x^n = x^2 + 1 \xrightarrow{\text{بالمطابقة}}$$

$$2C_2 + C_0 = 1 \to C_2 = \frac{1 - C_0}{2} \;\&\&\; 6C_3 + C_1 = 0 \to C_3 = -\frac{C_1}{6}$$

$$12C_4 + C_2 = 1 \to C_4 = \frac{1 - C_2}{12} = \frac{1 - \frac{1 - C_0}{2}}{12} \to C_4 = \frac{(1 + C_0)}{24}$$

والآن لنأخذ $C_0 = -1 \to C_1 = 0 \xrightarrow{\text{سينتج لدينا}} C_2 = 1 \;\&\&\; C_3 = 0 \;\&\&\; C_4 = 0$

نعوض في منشور تايلور نجد

Syria Math Team

$$y = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{\text{وبالتالي}} y = x^2 - 1$$

ومنه الحل العام هو مجموع الحلين أي :

$$y = C_0.\cos(x) + C_1.\sin(x) + x^2 - 1$$

انتهت المحاضرة

صفحتنا على فيسبوك: IOM الرابط : facebook.com/MathemagicTeam/	مجموعة السنة الثانية : Improve Our Mathematics	مجموعة السنة الأولى: طلاب كلية العلوم قسم الرياضيات في جامعة دمشق ٢٠١٧

إعداد: محمد شهلا – فادي الشريطي – مهيار طعمه

Syria Math Team