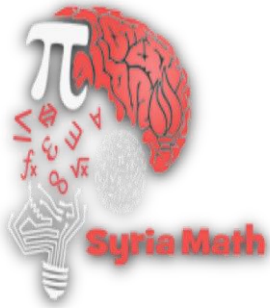


◄ دكتور المادة: جبران جبران

◄ المحاضرة الثانية عنوان المحاضرة : المجموعات المفتوحة

المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-تمارين عن الكرة المفتوحة

٢-المجموعة المفتوحة

٣-الفضاء الطوبولوجي

تمرين : لنزود $\mathbb{R}^2$ بالمسافات التالية :

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2 : z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) ;$$

$$d_1(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

$$d_2(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$d_\infty(z_1 , z_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

أوجد الكرة المفتوحة التي مركزها $O(0,0)$ و نصف قطرها $r = 1$ من أجل كل من المسافات السابقة

الحل: من أجل كل كرة نريد إيجادها سنضع تعريف الكرة المفتوحة و ذلك وفقاً للمترك الموافق و من ثم نحاول إيجاد مجموعة الثنائيات التي تحقق شرط كل كرة :

- **من أجل دالة المسافة الأولى :**

$$N_{d_1}((0,0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_1((x, y), (0,0)) < 1\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 0| + |y - 0| = |x| + |y| < 1\}$$

و المجموعة الأخيرة يمكن أن نوجد عناصرها بأن نقسم الدراسة إلى أربع حالات (عندما يكون كلاهما موجب و من ثم عندما تكون x سالبة و y موجبة و من ثم عندما تكون x موجبة و y سالبة و من ثم و من ثم عندما يكون كلاهما سالب)

Syria Math Team

أي يمكن أن نكتب المجموعة كما يلي :

$$N_{d_1}((0,0),1) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

حيث :

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y<1 \ : x,y \geq 0\}$$

أي هي مجموعة الثنائيات **الموجبة** التي مجموعها أصغر تماماً من الواحد و بالتالي هي مجموعة نقاط المستوي التي تقع في الربع الأول و مجموع مسقطيها أصغر من الواحد (تقع تحت المستقيم *x+y=1*)

أيضاً يكون :

$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x+y<1 \ : x \leq 0, y \geq 0\}$$

و هي مجموعة جميع الثنائيات التي الفرق بين مسقطها الثاني و مسقطها الأول أصغر من الواحد و التي تقع في الربع الثاني .

و بالمثل نأخذ :

$$A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x-y<1 : x,y \leq 0\}$$

و هي مجموعة جميع الثنائيات التي تحقق المتراجحة الأخيرة و التي تقع في الربع الثالث

أخيراً نأخذ :

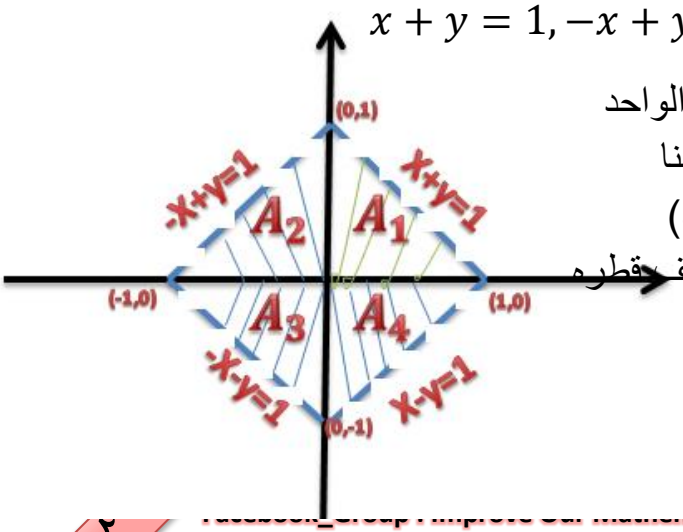
$$A_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y<1 : x \geq 0 \, , y \leq 0\}$$

و لنرسم هذه المناطق :

و لنفسر قليلاً الرسم :

لقد رسمنا المستقيمات $x+y=1, -x+y=1, -x-y=1, x-y=1$

و وضعناها بشكل منقط (لأن الإشارات هي أصغر تماماً من الواحد أي أننا لا نريد النقاط التي تنتمي إلى المستقيمات) و من ثم قمنا بتحديد جميع النقط التي تحقق المتراجحات(أصغر من الواحد) فنجد أن الكرة المفتوحة هنا و وفق هذا المترك هي مربع نصف قطره هو البعد بين مركز المربع و أحد رؤوسه .



- **من أجل دالة المسافة الثانية :**

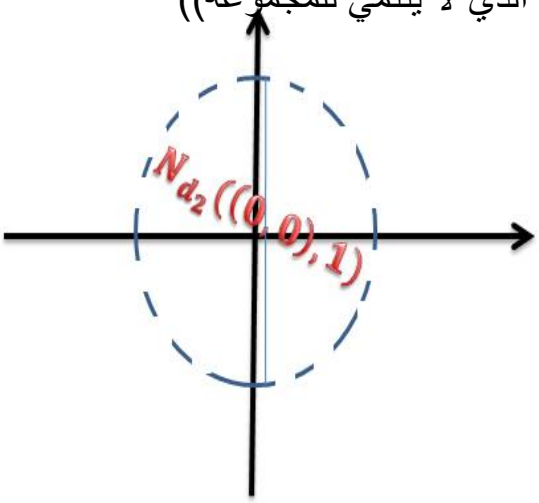
$$N_{d_2}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_2((x,y),(0,0)) < 1\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < 1\}$$

نربع طرفي المتراجحة :

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$$

و هي مجموعة الثنائيات التي تقع **تماماً** داخل الدائرة التي مركزها المبدأ و نصف قطرها الواحد (بلا المحيط)

يوضح الرسم هذه الكرة مع الإشارة أننا وضعنا المحيط بشكل منقط لأن المتراجحة أصغر تماماً ((هذه الطريقة تقابل وضع المجال مفتوح عند طرف المجال الذي لا ينتمي للمجموعة))



أخيراً : من أجل المسافة الأخيرة :

$$N_{d_\infty}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} < 1\}$$

إن $\max\{|x|,|y|\}$ هو القيمة العظمى للعددين $|x|$ و $|y|$ و حسب ما سبق فإنه إذا كانت هذه القيمة العظمى أصغر من الواحد فلا بد أن كل من العددين أصغر من الواحد ،إذن :

$$N_{d_\infty}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}$$

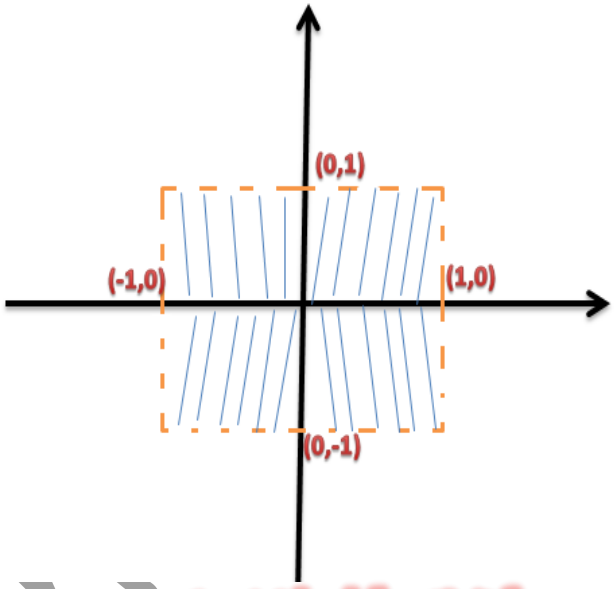
و حسب خواص القيمة المطلقة نكتب :

$$N_{d_\infty}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$$

و هي مجموعة الثنائيات التي كل من مسقطيها يقع بين العددين *1-* و *1* ، و بالرسم يكون

Syria Math Team

نلاحظ أن الكرة المفتوحة هنا هي مجموعة الثنائيات التي تقع تماماً داخل (لا نريد المحيط لأن المتراجحة أصغر تماماً فوضعنا المحيط بشكل منقط)



المجموعة المفتوحة في فضاء متري : ليكن (X, d) فضاء متري نقول عن $A \subseteq X$ إنها مجموعة مفتوحة إذا كانت كل نقطة منها تصلح أن تكون مركزاً لكرة مفتوحة محتواة تماماً في A

بمعنى آخر :

$$A \text{ مجموعة مفتوحة } \Leftrightarrow \forall x_0 \in A\ ; \exists r > 0 :\ N(x_0, r) \subseteq A$$

نتيجة : كل **كرة مفتوحة** هي **مجموعة مفتوحة** و العكس غير صحيح بالضرورة .

الإثبات : لتكن $A = N_d(a,r)$ كرة مفتوحة مركزها a ∈ X و نصف قطرها r و نريد إثبات أنها مجموعة مفتوحة و بالتالي يجب أن نجد لكل نقطة من هذه الكرة ، كرة أخرى مركزها هذه النقطة و محتواة في A

$$\forall x \in A = N_d(a,r) \Leftrightarrow d(x,a) < r$$

و لنرمز $r' = r - d(x,a) > 0$ (لاحظ أن r' مرتبط بـ x المأخوذة من A فلكل x لدينا r' مناسبة) و لنثبت أن الكرة $N_d(x,r')$ التي مركزها النقطة الاختيارية x و نصف قطرها r' محتواة في A

-لإثبات الاحتواء سنأخذ عنصراً كيفياً y من $N_d(x,r')$ و نثبت أنه ينتمي لـ A:

$$y \in N_d(x,r') \Leftrightarrow d(x,y) < r' = r - d(x,a) \dots\dots (*)$$

Syria Math

و لننظر فيما إذا كانت y تنتمي إلى A (الكرة الأصلية)

$$d(y,a) \underset{\text{حسب متراجحة المثلث}}{\leq} d(y,x)+d(x,a) \overset{*}{<} r-d(x,a)+d(x,a)=r$$

نلاحظ أن $d(y,a)<r$ إذاً $y\in N_d(a,r)=A$ و بالتالي : $N_d(x,r')\subseteq N_d(a,r)=A$ و بالتالي لكل نقطة x من A وجدنا كرة مفتوحة مركزها هذه النقطة و محتواة في A فالكرة المفتوحة $N_d(a,r)=A$ هي مجموعة مفتوحة .

نتائج : ليكن (X,d) فضاء متري عندئذٍ :

١- المجموعتان X,ϕ مفتوحتان في (X,d)
٢- تقاطع مجموعتين مفتوحتين في (X,d) هو مجموعة مفتوحة
٣- التقاطع المنتهي لمجموعات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة
٤- الاجتماع لأي جماعة من المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة
٥- كل مجموعة مفتوحة هي إما خالية أو هي اجتماع لكرات مفتوحة

الإثبات :

١- **من أجل المجموعة ϕ:** فإنها مجموعة مفتوحة لأنها تحقق :

$$\forall x\in\phi;\exists r>0: N_d(x,r)\subseteq\emptyset$$

فائدة : عندما نتعامل مع المجموعة الخالية فإذا بدأنا بالعبارة
"أياً كان العنصر ينتمي للخالية فإنه يحقق ...."
فإن كل ما بعدها محقق

أما إذا بدأنا بعبارة :

"يوجد في الخالية عنصر يحقق.."
فهذه الجملة تكون مرفوضة و تناقض المنطق الرياضي

من أجل المجموعة X : فإنها تشكل الفضاء كاملاً و أي ستكون محتواة فيه أي :

Cyria Math Team

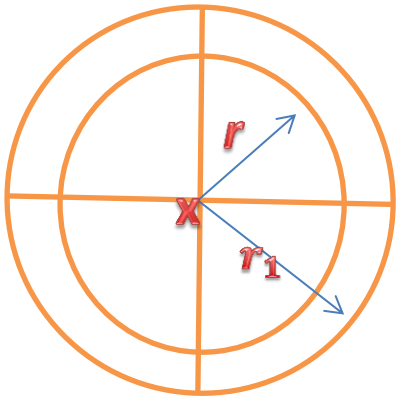
$$\forall x \in X\ ; \exists r > 0 : N_d(x,r) \subseteq X$$

٢- لتكن A_1, A_2 مجموعتان مفتوحتان في X و لنثبت أن $A = A_1 \cap A_2$ مجموعة مفتوحة

$$\forall x \in A = A_1 \cap A_2 \Rightarrow x \in A_1 \wedge x \in A_2$$

إذاً يوجد $r_1, r_2 > 0$ بحيث يكون $N_d(x,r_1) \subseteq A_1\ , N_d(x,r_2) \subseteq A_2$

و لكن نحن نبحث عن كرة تكون محتواة في التقاطع إذا لابد أن يكون نصف قطرها أصغر نصف قطر ممكن ... فنختار $r = \min\{r_1, r_2\}$ عندئذٍ الكرة $N_d(x,r) \subseteq N_d(x,r_1) \subseteq A_1$ و أيضاً $N_d(x,r) \subseteq N_d(x,r_2) \subseteq A_2$



((الرسم لمجرد التوضيح ، حيث أخذنا كرة لها نفس مركز الكرة الكبيرة و نصف قطرها أصغر فحصلنا على كرة محتواة في الكبيرة ... و كذلك من أجل الثانية))

مما سبق نجد أن $N_d(x,r) \subseteq A = A_1 \cap A_2$ و بالتالي التقاطع لمجموعتين مفتوحتين هو مفتوحة .

٣- يمكن برهانها بالاستقراء الرياضي .

٤- لنأخذ $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ حيث أن $\{A_i : i \in I\}$ جماعة من المجموعات المفتوحة

$$\forall x \in A = \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow \exists i_0 \in I : x \in A_{i_0}$$

ولما كانت A_{i_0} مجموعة مفتوحة فإنه يوجد $r > 0$ بحيث يكون $N_d(x,r) \subseteq A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i = A$ و بالتالي استطعنا إيجاد لكل نقطة من الاجتماع كرة مركزها هذه النقطة و محتواة في الاجتماع ....فالاجتماع كرة مفتوحة .

٥- لتكن A مجموعة ، فإذا كانت خالية فإنها مفتوحة حسب (1)

لنفرض $A \neq \phi$ مجموعة مفتوحة عندئذٍ :

$$\forall x \in A; \exists r_x > 0 : N_d(x,r_x) \subseteq A$$

الآن :

Syria Math Team

$$A=\bigcup_{x\in A}\{x\}\subseteq\bigcup_{x\in A}N_d(x,r_x)\subseteq\bigcup_{x\in A}A=A$$

$$\Rightarrow A=\bigcup_{x\in A}N_d(x,r_x)$$

تعريف : لتكن $X\neq\phi$ و ليكن $\tau\in \mathrm{P}(\mathrm{X})$ نقول عن τ إنها طوبولوجيا على X إذا حققت الشروط :

١- $\phi,X\in\tau$
٢- $\forall A,B\in\tau\,;A\cap B\in\tau$
٣- اجتماع أي جماعة عناصر من τ هو عنصر من τ

و عندئذٍ ندعو الثنائية (X,τ) بفضاء طوبولوجي

و في هذه الحالة تكون المجموعات المفتوحة هي وفقط هي عناصر τ

ملاحظة: لنأخذ في فضاء متري (X,d) صف المجموعات المفتوحة في الفضاء المتري X و لنرمز لها بـ τ_d عندئذٍ يكون (X,τ_d) فضاء طوبولوجي مولد بالمترك d

(((((ليس من الضرورة أن يكون كل فضاء طوبولوجي مولد بمترك)))

تذكرة: إذا كانت X مجموعة غير خالية فإن $P(X)$ هي مجموعة كل المجموعات الجزئية في X و تدعى مجموعة أجزاء X

ثم نأخذ من هذه المجموعة صف من المجموعات ندعوه τ

تمييز: لا بد أن نميز بين مفهوم المجموعات المفتوحة في فضاء متري و مفهوم المجموعات المفتوحة في فضاء طوبولوجي .....

ففي **الفضاء المتري** تكون المجموعة مفتوحة إذا حققت أن لكل عنصر من عناصرها يوجد كرة مركزها هذا العنصر و محتواة تماماً في المجموعة (التعريف المألوف)

أما في **فضاء طوبولوجي** : فتكون المجموعات المفتوحة هي و فقط هي عناصر الطوبولوجيا τ

انتهت المحاضرة

إعداد: عبد الرحمن البحش –شهناز طاطيش –نذير تيناوي