Mathematical Modeling

النمذجة الرياضية

المحاضرة: الثامنة والتاسعة

الدكتورة: ميسم

البرنامج الخطي المرافق

إن كل برنامج خطي يمتلك برنامج مرافق بحيث أنه إذا وجد حل لأحد البرنامجين فهناك حل للآخر، حيث تتساوى قيمة تابعي الهدف للبرنامجين عند الحل الأمثل و تكون الحاجة لإيجاد البرنامج المرافق ضرورية في العديد من المسائل و خاصة في الحالة التي يكون فيها عدد المتغيرات أقل من عدد القيود.

تشكيل البرنامج المرافق.

لنفرض أنه لدينا برنامج خطي يتكون من تابع هدف في صورة تعظيم Max و شروط مقيدة في صورة أقل أو يساوي ندعوه البرنامج الأصلي و يأخذ الشكل التالي:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \rightarrow Max$$

ضمن الشروط:

$$\begin{array}{c|l}
y_1 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
y_2 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
\vdots & \quad \vdots \\
y_m & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m
\end{array}$$

$$x_j \geq 0 \qquad ; j = \overline{1:n}$$

يكون البرنامج المرافق لهذا البرنامج:

$$b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \rightarrow Min$$

$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \cdots + a_{m1} y_m \geq C_1$$
$$a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots + a_{m2} y_m \geq C_2$$
$$\vdots$$
$$a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \cdots + a_{mn} y_m \geq C_n$$

$$y_i \geq 0 \quad ; \quad i = 1:m$$

- و هذه تكون طريقة لبناء النماذج المرافقة . في حالة أن النموذج المعطى لدينا معطى بالصيغة الأساسية لبناء النماذج المرافقة (تابع تعظيم و قيود أصغر أو يساوي)

ملاحظة : إذا كان التابع لدينا Max فيجب أن تكون جميع القيود أقل أو يساوي و إذا لم تكن من نوع أقل أو يساوي فيجب تحويلها إلى النوع أقل أو يساوي .

و إذا كان التابع لدينا Min يجب أن تكون جميع القيود أكبر أو يساوي و إذا لم تكن من نوع أكبر أو يساوي فنحولها إلى النوع أكبر أو يساوي .

- إذا كان النموذج المعطى تابع Max (تابع Min) و القيود مختلطة فإننا نقوم بتحويل القيود إلى أصغر أو يساوي (أكبر أو يساوي) وفق الآتي المتراجحات من نوع أصغر أو يساوي تحول إلى أكبر أو يساوي بالضرب بـ (-1) و بالعكس الأكبر أو يساوي تحول إلى أصغر أو يساوي بالضرب بـ (-1) .

أما إذا كان القيد من نوع يساوي فإنه يحول إلى قيدين (أكبر أو يساوي) و (أصغر أو يساوي)

مثلاً: إذا كان لدينا $g(x) = K$ فإنه يتحول إلى

$$g(x) = K \quad \begin{cases} g(x) \geqslant K \\ g(x) \leqslant K \end{cases}$$

ثم نحول المتراجحة من نوع تابع الهدف . ومقابل هذا القيد نضع متحول

$$y_s = y_s^+ - y_s^-$$

مثال: أوجد النموذج المرافق للنموذج الخطي التالي:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \longrightarrow Max$$

ضمن القيود

$$2x_1 + x_2 - 7x_3 \geqslant 4$$
$$x_1 + x_3 \leqslant 8$$
$$x_1 + 5x_2 + x_3 = 9$$
$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$

الحل:

بما أن التابع Max فيجب أن تكون جميع القيود من نوع أصغر أو يساوي.

في البداية نحول قيد المساواة ؛ فتصبح القيود

$$2x_1 + x_2 - 7x_3 \geqslant 4$$
$$x_1 + x_3 \leqslant 8$$
$$x_1 + 5x_2 + x_3 \geqslant 9$$

$$x_1 + 5x_2 + x_3 \leqslant 9$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \geqslant 0$$

الآن:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \longrightarrow Max$$

$$\begin{array}{c|l}
y_1 & -2x_1 - x_2 + 7x_3 \leqslant -4 \\
y_2 & x_1 + x_3 \leqslant 8 \\
y_3^- & -x_1 - 5x_2 - x_3 \leqslant -9 \\
y_3^+ & x_1 + 5x_2 + x_3 \leqslant 9 \\
 & x_1 , x_2 , x_3 \geqslant 0
\end{array}$$

ومنه

$$-4y_1 + 8y_2 + 9y_3^+ - 9y_3^- \longrightarrow Min$$

$$-2y_1 + y_2 + y_3^+ - y_3^- \geqslant 3$$

$$-y_1 + 5y_3^+ - 5y_3^- \geqslant 2$$

$$7y_1 + y_2 + y_3^+ - y_3^- \geqslant 5$$

$$y_1 , y_2 , y_3^+ , y_3^- \geqslant 0$$

وهو البرنامج المرافق

طريقة بناء النموذج المرافق:

1/ إذا كان تابع الهدف في البرنامج الأصلي بصورة تعظيم (تقليل) فإن تابع الهدف في البرنامج المرافق بصورة تقليل (تعظيم).

2/ يقابل كل شرط (قيد) في البرنامج الأصلي متغير في البرنامج المرافق و يقابل كل قيد في البرنامج المرافق متغير في البرنامج الأصلي.

3/ إذا كان تابع الهدف في أي من البرنامجين بصورة تعظيم فإن القيود تكون بصورة أقل أو يساوي، أما إذا كان تابع الهدف في أي من البرنامجين بصورة تقليل فإن القيود تكون بصورة أكبر أو يساوي.

4/ معاملات تابع الهدف في البرنامج المرافق هي قيم الطرف الأيمن لشروط البرنامج الأصلي، وقيم الطرف الأيمن لشروط البرنامج المرافق هي معاملات تابع الهدف في البرنامج الأصلي.

5/ إذا كان عدد القيود m وعدد المتحولات n في البرنامج الأصلي، فإن عدد القيود يصبح n وعدد المتحولات يصبح m في البرنامج المرافق.

6/ معاملات المتحولات في شروط البرنامج المرافق هي نفسها معاملات المتحولات في شروط البرنامج الأصلي مع تبديل معاملات الأسطر والأعمدة، هذا يعني أن معاملات السطر i في الشروط المقيدة للبرنامج الأصلي هي نفسها معاملات العمود i في الشروط المقيدة للبرنامج المرافق.

أمثلة: أوجد البرنامج المرافق للنماذج الخطية التالية.

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \longrightarrow Max \qquad \boxed{1}$$

ضمن الشروط

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \leq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \geq b_2$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

Alnour

$$L = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \longrightarrow Min \qquad \boxed{2}$$

ضمن الشروط

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 4$$
$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geqslant 2$$
$$x_1 , x_2 , x_3 \geqslant 0$$

حل $\boxed{1}$

$$Z = c_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 \longrightarrow Max$$
$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \leqslant b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \geqslant b_2$$
$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \geqslant b_3$$
$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \leqslant b_3$$
$$x_1 , x_2 , x_3 \geqslant 0$$

الآن:

$$Z = c_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 \longrightarrow Max$$

$$\begin{array}{c|l}
y_1 & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \leqslant b_1 \\
y_2 & -a_{21} x_1 - a_{22} x_2 - a_{23} x_3 \leqslant -b_2 \\
y_3^- & -a_{31} x_1 - a_{32} x_2 - a_{33} x_3 \leqslant -b_3 \\
y_3^+ & a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \leqslant b_3
\end{array}$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \geqslant 0$$

نكون البرنامج المرافق:

$$b_1 y_1 - b_2 y_2 + b_3 y_3^+ - b_3 y_3^- \longrightarrow Min$$

$$a_{11} y_1 - a_{21} y_2 + a_{31} y_3^+ - a_{31} y_3^- \geqslant C_1$$
$$a_{12} y_1 - a_{22} y_2 + a_{32} y_3^+ - a_{32} y_3^- \geqslant C_2$$
$$a_{13} y_1 - a_{23} y_2 + a_{33} y_3^+ - a_{33} y_3^- \geqslant C_3$$
$$y_1 , y_2 , y_3^+ , y_3^- \geqslant 0$$

انتهت

البرمجة ذات الأعداد الصحيحة:

مسائل البرمجة ذات الأعداد الصحيحة:

هي مسائل برمجة لاخطية، ولكن يمكن تحويلها إلى خطية بالاستعانة بالمتحولات الصحيحة التي تأخذ إحدى القيمتين صفر أو واحد، توضح الفكرة الأساسية من خلال الأمثلة الآتية:

1 - مسألة ميزانية رأس المال:

تخطط شركة لصرف رأس مالها خلال الفترات الزمنية m القادمة و يوجد n مشروع تتنافس على رأس مال محدود B_i المتوفر للاستثمار في الفترة i عند اختيار كل مشروع يصبح هذا المشروع بحاجة إلى رأس مال معين في كل فترة من الفترات، يرمز له بالرمز a_{ij} (هو المال اللازم في المشروع j خلال الفترة i)

تقاس قيمة المشروع بدلالة تدفق السيولة المواصفة لهذا المشروع في كل فترة محسوماً منه قيمة التضخم، يدعى ذلك صافي القيمة المحلية و لنفرضه v_j، أي أن v_j هي صافي القيمة المحلية للمشروع j

المطلوب في هذه المسألة اختيار المشاريع الملائمة للاستثمار و التي تجعل القيمة الكلية لجميع المشاريع المختارة أعظمية

الحل:

نفرض $x_j = 1$ إذا اختير المشروع j و

$x_j = 0$ خلاف ذلك.

حيث $j = 1 : n$

(و دالة الهدف هي القيمة الإجمالية للمشاريع) (أعظمية)

إن قيمة المشروع j هي $v_j . x_j$ و هي تساوي v_j أو 0 عند

$$Z = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_n x_n \rightarrow Max$$

وهو تابع الهدف.

القيود:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leqslant B_i \quad ; \quad i = \overline{1:m}$$

(حيث a_{ij} هو المال المخصص للمشروع j خلال الفترة i)

ملاحظة: يجب أن نكتب القيود بالشكل المفصل أي يجب أن ننشرها ونكتب تابع الهدف مفصل؛ أي:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leqslant B_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leqslant B_m$$

وَ إما $x_j = 0$ أو $x_j = 1$

حيث $j = \overline{1:n}$

النموذج الرياضي: أوجد القيمة الأعظمية للتابع

$$Z = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_n x_n \rightarrow Max$$

ضمن القيود: تتم كتابة القيود m مرة.

---

2 ـ مسألة النفقة الثابتة:

يدرس مسألة تخطيط إنتاج n منتج حيث يحتاج المنتج j إلى كلفة تحضير أو إنتاج ثابتة K_j مستقلة عن الكمية المنتجة وَ كلفة متغيرة C_j لكل وحدة تتناسب مع الكمية المنتجة، لنفرض أنه لدينا m مادة وَ أنه كل وحدة من المنتج j تحتاج a_{ij} وحدة من المادة i

نفرض أن المنتج j الذي له ترخيص مبيعات قدرها d_j يباع بسعر P_j للوحدة الواحدة و أنه يتوفر لدينا فقط b_i وحدة من المادة i حيث $i=1:m$.

هدف المسألة: تعيين خليط المنتجات الأمثل الذي يجعل الربح الصافي أعظم ما يمكن.

الحل:

إن التكلفة الكلية للإنتاج = التكلفة الثابتة + التكلفة المتغيرة، وهي تابع غير خطي للكمية المنتجة بسبب وجود نوعين من التكلفة بمساعدة المتحولات الصحيحة الثنائية (صفر، واحد) يمكن صياغة المسألة كبرنامج خطي ذي أعداد صحيحة، نفرض x_j هي الكمية المنتجة من المنتج j ونفرض أيضاً المتحول δ_j الذي يرمز إلى القرار بإنتاج المنتج j أو عدم إنتاجه أي $\delta_j=1$ إذا اتخذ القرار بإنتاج المنتج و $\delta_j=0$ خلاف ذلك.

ملاحظة: إذا كان $\delta_j=1$ فهذا يؤدي إلى أن $x_j>0$

أما إذا كان $\delta_j=0$ فهذا يؤدي إلى أن $x_j=0$.

إن قيمة المنتج j (سعر البيع) هي $P_j x_j$

فتكون قيمة جميع المنتجات هي $\sum_{j=1}^{n} P_j x_j$

وتكون تكلفة إعداد كل المنتجات

$$\sum_{j=1}^{n} (\underbrace{K_j \delta_j}_{\text{التكلفة الثابتة للمنتج j}} + \underbrace{c_j x_j}_{\text{التكلفة المتغيرة للمنتج j}})$$

دالة الربح هي (التكلفة - سعر البيع) أي أن

$$Z = \sum_{j=1}^{n} P_j x_j - \sum_{j=1}^{n} (K_j \delta_j + C_j x_j) \rightarrow Max$$

القيود:

قيود المواد المستخدمة

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad ; \quad i = \overline{1:m}$$

$\sum$ (الكمية المستخدمة من المادة i للمنتج j) $\leqslant b_i$ (المتوفرة)

قيود على البيع (فرصة المبيعات)

$$x_j \leqslant d_j \delta_j \quad ; \quad j = \overline{1:n}$$

النموذج الرياضي: أوجد القيم الأعظمية للتابع

$$Z = \sum_{j=1}^{n} P_j x_j - \sum_{j=1}^{n} (K_j \delta_j + C_j x_j) \rightarrow Max$$

ضمن القيود:

نكتب مجموعة القيود الأولى.

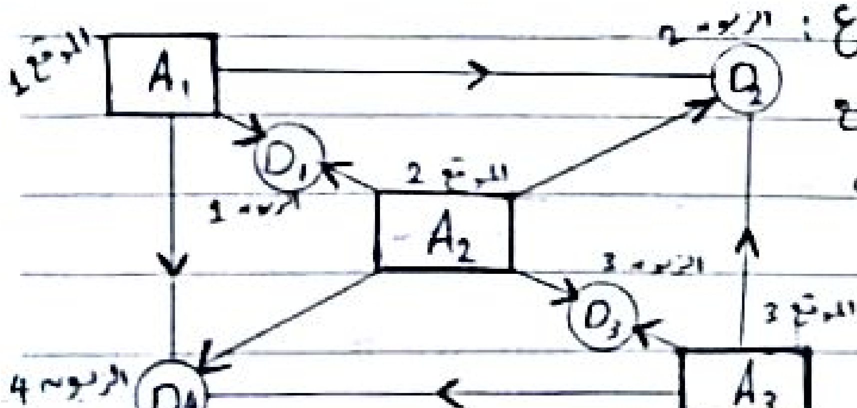
و المجموعة الثانية.

و $x_j \geqslant 0 \; ; \; j = \overline{1:n}$.

و $\delta_j = 0$ أو $\delta_j = 1$.

3 ـ مسألة تعيين موقع مستودع:

تخطط شركة بيع بالمفرق للتوسع في نشاطاتها في منطقة معينة عن طريق إنشاء مستودعين جديدين ويوضح الشكل الرسم



مواقع محتملة، ينبغي تزويد أربعة زبائن تقدر طلباتهم بما يلي D_1, D_2, D_3, D_4 لنفرض أنه بإمكان أي موقع من المواقع المرشحة للمستودعات تلبية جميع الطلبات حيث يمكن للموقع الأول تلبية طلبات الزبائن 1، 2، 4 فقط.

و يمكن للموقع الثاني تلبية طلبات جميع الزبائن.

و الموقع الثالث يمكنه تلبية طلبات الزبائن 2، 3، 4 فقط.

نرمز لتكلفة نقل الوحدة الواحدة من الموقع i إلى الزبون j بالرمز C_{ij}

أيضا تتوفر لدينا المعطيات التالية عن المواقع المرشحة للمستودعات

الموقع	سعة الموقع	الرأسمال الاستثماري	كلفة التشغيل
1	A_1	K_1	P_1
2	A_2	K_2	P_2
3	A_3	K_3	P_3

المطلوب: اختيار الموقع الملائم للمستودعين التي تجعل التكاليف الكلية للاستثمار و التشغيل و النقل أصغرية.

الحل:

إن الملاحظة في المسألة سيرها وجود نوعين من التكلفة لكل موقع كلفة رأسمال ثابتة مستقلة عن الكمية المخزنة في المستودع و له كلفة متغيرة متناسبة مع الكمية المنقولة. باستخدام المتحولات الصحيحة يمكن صياغة هذه المسألة بشكل برنامج ذي أعداد صحيحة.

نفرض δ_i يأخذ القيم التالية $\delta_i = 1$ إذا اخترنا الموقع i

$\delta_i = 0$ خلاف ذلك

نفرض x_{ij} الكمية المنقولة من الموقع i إلى السوق j.

- تابع التكلفة سنأخذه لكل موقع على حدا

إن تكلفة الموقع الأول هي:

$$\underbrace{K_1\delta_1}_{\text{تكلفة ثابتة}} + \underbrace{P_1(x_{11}+x_{12}+x_{14})}_{\text{هي كلفة تشغيل مرتبطة بالكميات المنقولة من هذا الموقع إلى الأسواق التي يخدمها } P_1} + \underbrace{C_{11}x_{11}+C_{12}x_{12}+C_{14}x_{14}}_{\text{تكلفة النقل من الموقع الأول}}$$

وبنفس الطريقة في التكلفة للموقعين الثاني والثالث، ويكون تابع التكلفة عندئذ:

$$L = \text{تكلفة الموقع الأول} + \text{تكلفة الموقع الثاني} + \text{تكلفة الموقع الثالث} \rightarrow Min$$

القيود:

قيود قدرة الموقع (قيد السعة)

$$x_{11}+x_{12}+x_{14} \leq A_1\delta_1$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} \leq A_2\delta_2$$

$$x_{32}+x_{33}+x_{34} \leq A_3\delta_3$$

قيود طلبات الزبائن

$$x_{11}+x_{21} = D_1$$

$$x_{12}+x_{22}+x_{32} = D_2$$

$$x_{23}+x_{33} = D_3$$

$$x_{14}+x_{24}+x_{34} = D_4$$

/ /

قيد اختيار الموقع (نريد اختيار موقعين فقط)

$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 2$

النموذج الرياضي: أوجد القيمة الأصغرية للتابع L

ضمن القيود:

نكتب مجموعة القيود الأولى (على المواقع)

وَ مجموعة القيود الثانية (على الزبائن)

وَ قيد اختيار الموقع

وَ إما $\delta_i = 1$ أو $\delta_i = 0$

حيث $i = \overline{1:3}$

وَ $x_{ij} \geq 0 \; ; \; i = \overline{1:3}$

$j = \overline{1:4}$

انتهت

* من المهم الكتابة بالتفصيل في الامتحان

أي نشر دالة الهدف وَ القيود

* مسألة تعيين موقع مستودع قد تأتي في الامتحان ؛ دون الشكل

أو قد تأتي بتقيم !! ^_^