تمرين :

المحاضرة الثانية

عزيف سرياماث

ليكن $V = \mathbb{R}^2$ و $A = \{a_1 = (1,1), a_2 = (1,-1)\}$

$B = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$

1- أوجد مصفوفة الانتقال من A إلى B.

2- أوجد مصفوفة الانتقال من B إلى A.

3- ماذا تلاحظ؟

الحل:

1) $P : A \longrightarrow B$

- $a_1 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$

$(1,1) = \lambda_1 (1,0) + \lambda_2 (0,1) = \lambda_1 + \lambda_2$

$= 1 e_1 + 1 e_2$ $\qquad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$

- $a_2 = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$

$(1,-1) = \mu_1 (1,0) + \mu_2 (0,1) = \mu_1 + \mu_2$

$= 1 e_1 - 1 e_2$ $\qquad \mu_1 = 1, \mu_2 = -1$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) $Q : B \longrightarrow A$

- $e_1 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$

$(1,0) = \alpha_1 (1,1) + \alpha_2 (1,-1)$

$= (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2)$

- $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 1 - \alpha_2$
- $\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$

$\Rightarrow 2\alpha_1 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow e_1 = \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_2$

- $e_2 = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2$

$(0,1) = \beta_1 (1,1) + \beta_2 (1,-1)$

$= (\beta_1 + \beta_2, \beta_1 - \beta_2)$

- $\beta_1 + \beta_2 = 0 \Rightarrow \beta_1 = -\beta_2$
- $\beta_1 - \beta_2 = 1 \Rightarrow \beta_1 = 1 + \beta_2$

$\Rightarrow -\beta_2 = 1 + \beta_2 \Rightarrow 2\beta_2 = -1$

$\Rightarrow \beta_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \beta_1 = \frac{1}{2}$

- $e_2 = \frac{1}{2} a_1 - \frac{1}{2} a_2$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3) $P \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

$Q = P^{-1}, \quad P = Q^{-1}$

مراجعة :

الفضاء الشعاعي :

$(V, +, \cdot)$ معرف على الحقل F ؛ $W \neq \emptyset$

مزودة بقانونين التشكيل الأول داخلي $(+)$

والثاني خارجي $(\cdot)$

مفهوم المجموعة المولدة للفضاء الشعاعي :

ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل F ،

تكون المجموعة $G\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مولدة لـ V

إذا كان كل عنصر v من V يكتب كتركيب بدلالة

عناصر G

ملاحظة : إذا تعني إذا وفقط إذا.

$$v \in V \Rightarrow v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

$$; \lambda_n \in F$$

المجموعة المستقلة خطيا :

تكون المجموعة $G\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مستقلة خطيا

إذا تحقق الشرط :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

جميعها تساوي الصفر.

مثال: 1

ليكن $V=\mathbb{R}^2$, المجموعة $A=\{a_1=(1,2), a_2=(2,1)\}$

هل A مستقلة خطياً ؟

الحل:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = 0 \Rightarrow (0,0) \in \mathbb{R}^2$$

$$\lambda_1(1,2) + \lambda_2(2,1) = (0,0)$$

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2 , 2\lambda_1 + \lambda_2) = (0,0)$$

- $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2\lambda_2$
- $2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow -4\lambda_2 - \lambda_2 = 0$

$\Rightarrow -3\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow$ A مستقلة خطياً

مثال: 2

لتكن $V=\mathbb{R}^2$ و $B=\{b_1=(1,2), b_2=(2,4)\}$

هل B مستقلة خطياً ؟

الحل:

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = 0$$

$$\lambda_1(1,2) + \lambda_2(2,4) = (0,0)$$

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2 , 2\lambda_1 + 4\lambda_2) = (0,0)$$

- $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2\lambda_2$
- $2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \Rightarrow 0\,\lambda_2 = 0$

$\forall \lambda_2 \in \mathbb{R}$ تحقق $0\lambda_2 = 0$ غير مستقلة

SARAH.

ملاحظات: (هامة)

1- ضمن اي فضاء شعاعي المجموعة وحيدة العنصر تكون مستقلة اذا كانت مؤلفة من عنصر غير صفري.

2- ضمن اي فضاء شعاعي المجموعة المكونة من عنصرين تكون مستقلة خطياً إذا لم ينتج احد الشعاعين من الآخر بضربه بعدد.

3- في الفضاء الشعاعي R^n المجموعة $A\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

«عناصر R^n مرتبات ذات n مركبة»

$$v_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$
$$v_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$$
$$\vdots$$
$$v_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})$$

تكون مستقلة خطياً إذا كانت:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

4- اي مجموعة مكونة من عناصر عددها أكبر من بعد الفضاء تكون مرتبطة خطياً «والعكس غير صحيح»

قاعدة و بُعد فضاء شعاعي:

- ليكن الفضاء الشعاعي V المعرّف على F وكانت
$G\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ قاعدة لـ V إذا كانت
1. G مولّدة لـ V و 2. G مستقلة خطيًا.

- أي يمكن ان نقول ان G تكون قاعدة لـ V إذا كانت
كل عنصر v من V يكتب على شكل تركيب خطي بدلالة
عناصر G وبشكل وحيد.

$\exists!\ \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n ; v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$

مثال: اذا كانت $G\{b_1, b_2\}$ وكانت

$v_1 = 2b_1 + b_2$
$v_2 = 3b_1 + 4b_2$
$\Rightarrow$ G ليست قاعدة لـ V

بُعد الفضاء:

هو عدد عناصر أي قاعدة له.

بُعد الفضاء R^n هو n

$\dim R^n = n$

$\dim M_{m\times n}(F) = m\times n$

$\dim M_n(R) = n^2$ مشكل خاص.

<< انتهت المحاضرة >>

إعداد: محمد اسد العزاز
تلريهات جلّو

<< دمتم بسرور يا ماشي >>