٣) جمل المتجهات ومبادئ الهندسة التحليلية

١- العزوم

١) عزم متجهة (شعاع) بالنسبة لنقطة:

تعريف: العزم $\vec{V}$ الذي مبدؤه A بالنسبة لنقطة ما في الفضاء O ونرمز له بـ $\vec{G} = (\vec{V}, \vec{O})$ ويعطى بالعلاقة

$$\vec{G} = \vec{OA} \wedge \vec{V}$$

ومن شكل نسمي O مركز العزم $\vec{G}$ ويتمتع بالصفات التالية:

١) $\vec{G}$ هو عزم $\vec{V}$ حول O عمودي على المستوي المعين بالمتجهين $\vec{V}$ و $\vec{OA}$ وطوله $|\vec{OA} \wedge \vec{V}|$ أو هو مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على $\vec{V}$ و $\vec{OA}$

٢) ينعدم $\vec{G}$ إلا إذا كان $\vec{0} = \vec{OA} \wedge \vec{V}$

إذا انطبقت النقطة O على المحور (الشعاع $\vec{V}$) أو انطبقت O على A

نفرض:

$\vec{V}(v_1, v_2, v_3)$

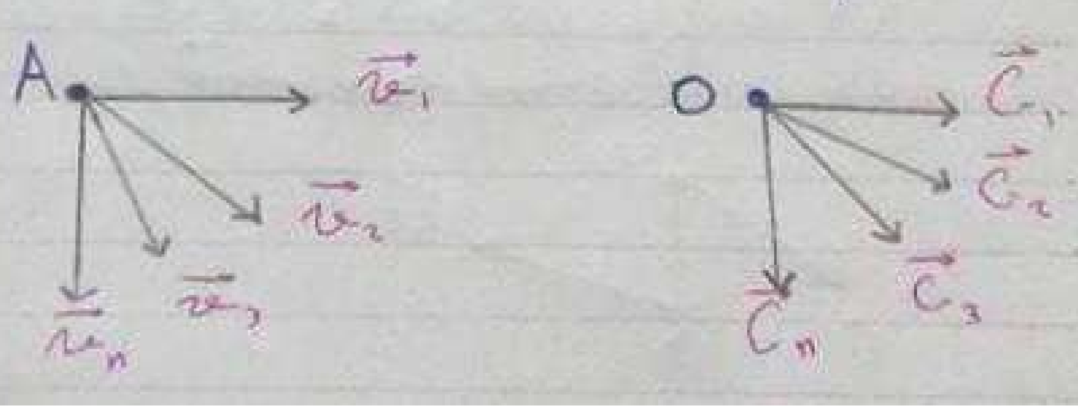
$A(a_1, a_2, a_3)$

$O(x, y, z)$

$$\vec{G} = \vec{OA} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 - x & a_2 - y & a_3 - z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

مبرهنة:

إن محصلة العزوم في نقطة O لمجموعة المتجهات تتلاقى في نقطة A تساوي إلى العزم في O لمحصلة هذه المتجهات.



البرهان

لنفرض ان المتجهات $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \ldots \vec{V_n}$ محصلتها $\vec{V}$ عندئذ عزوم هذه المتجهات حول o هي

$$\vec{G_1} = \vec{oA} \wedge \vec{V_1}$$

$$\vec{G_2} = \vec{oA} \wedge \vec{V_2}$$

$$\vdots$$

$$\vec{G_n} = \vec{oA} \wedge \vec{V_n}$$

بالجمع نجد

$$\vec{G} = \vec{G_1} + \vec{G_2} + \ldots + \vec{G_n}$$

$$= \vec{oA} \wedge \vec{V_1} + \vec{oA} \wedge \vec{V_2} + \ldots + \vec{oA} \wedge \vec{V_n}$$

$$= \vec{oA} \wedge (\vec{V_1} + \vec{V_2} + \ldots + \vec{V_n})$$

$$\boxed{\vec{G} = \vec{oA} \wedge \vec{V}}$$

٢) العلاقة بين عزمي متجهة بالنسبة لنقطتين

١) ليكن $\vec{V}$ متجهة مبدؤه A ولتكن o, o_1 نقطتان من الفضاء عندئذ

$$(\vec{V}, o_1) = \vec{o_1A} \wedge \vec{V}$$

$$= (\vec{o_1o} + \vec{oA}) \wedge \vec{V}$$

$$= (\vec{o_1o} \wedge \vec{V}) + (\vec{oA} \wedge \vec{V})$$

$$(\vec{V}, o_1) = (\vec{oV}, o_1) + (\vec{V}, o)$$

حيث $\vec{oV}$ هو متجهة تساوي $\vec{V}$ ومبدؤه o

لدينا $(\vec{V}, o_1)$ يعني عزم $\vec{V}$ بالنسبة لـ o_1

اما $(\vec{oV}, o_1)$ هو عزم $\vec{oV}$ بالنسبة لـ o_1

ولدينا $(\vec{V}, o)$ عزم $\vec{V}$ بالنسبة لـ o

ع) عزم المزدوجة البسيطة:

وهي مجموعة مكونة من متجهين متعاكسين (المتساويان بالطول متعاكسان بالجهة)

* نسمي طول العمود المشترك بين هذين المتجهين بذراع المزدوجة

ليكن $\vec{V_1}$ مسنود في A ويعاكس $\vec{V_2}$ مسنود في A_2 ولتكن O نقطة من الفراغ

$$\vec{G} = (\vec{V_1}, O) + (\vec{V_2}, O)$$

$$= (\vec{OA_1} \wedge \vec{V_1}) + (\vec{OA_2} \wedge \vec{V_2})$$

$$= \vec{OA_1} \wedge \vec{V_1} + \vec{OA_2} \wedge \vec{V_1}$$

$$= (\vec{OA_1} - \vec{OA_2}) \wedge \vec{V_1}$$

اذا $\vec{G} = \vec{A_2A_1} \wedge \vec{V_1}$

أو $\vec{G} = \vec{A_1A_2} \wedge \vec{V_2}$

ملاحظة:

$\vec{A_1A_2} = \vec{OA_1} - \vec{OA_2}$

$\vec{OA_1} = \vec{A_1A_2} + \vec{A_2O}$

♥ وهو شعاع طوله مساحة متوازي الاضلاع المنشأ على $\vec{A_1A_2}$ و $\vec{V_1}$ و عمودي على كل من $\vec{A_1A_2}$ و $\vec{V_1}$

تحليليا:

$$\vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a-a & b-b & c-c \\ x_1 & x_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

مركبات $\vec{A_1A_2}$

Scanned by CamScanner

٣) عزم متجهة بالنسبة لمحور

تعرف عزم متجهة بالنسبة لمحور Δ و نرمز له بـ $(\vec{V}, \Delta)$

بأنه :

القياس الجبري على هذا المحور لمسقط

$\vec{G}$ عزم $\vec{V}$ بالنسبة لنقطة O على Δ

$$g = (\vec{V}, \Delta) = (\vec{G} \cdot \vec{u}) = (\vec{V}, \vec{O}) \cdot \vec{u}$$

$$(\vec{OA}, \vec{V}, \vec{u}) \qquad g = (\vec{u}, \vec{OA}, \vec{V})$$

$$g = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ A_1 - O_1 & A_2 - O_2 & A_3 - O_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

الناتج كمية جبرية

* ان عزم متجهة حول محور هو عدد (مقدار جبري) للجداء المختلط

$$(\vec{V}, \Delta) = (\vec{OA}, \vec{V}, \vec{u})$$

ملاحظة :

$(\vec{V}, \Delta) = (\vec{V} \cdot \vec{u})$

$\vec{u}$ شعاع الوحدة لشعاع يوازي محور Δ (أ) تنطبق عليه

* العزم النسبي لمحورين *

ونرمز له $(\vec{V}_2, \vec{V}_1)$ حيث $\vec{V}$ مسقطه A و $\vec{V}_1$ مسقطه A_1

ويعرف بالعلاقة

$$(\vec{V}, \vec{V}_1) = (\vec{V}_1, \vec{AA_1}, \vec{V})$$

$$(\vec{V}_1, \vec{V}) = (\vec{V}, \vec{V}_1) = (\vec{V}, \vec{AA_1}, \vec{V}_1)$$

$$= (\vec{V}_1, \vec{V}, \vec{AA_1}) = \begin{vmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ a_1 - a_1 & b_1 - b_1 & c_1 - c_1 \end{vmatrix}$$

4) عزم متجهة بالنسبة لمستقيم (Δ):

ليكن $\vec{V}$ متجهة ، Δ مستقيم

نعرف عزم $\vec{V}$ بالنسبة المستقيم Δ ونرمز له $(\vec{V}, \Delta)$ بأنه الجزء المتجهة

والذي هو عزم المتجهة $\vec{V}$ بالنسبة لنقطة ما O من المستقيم ومعنا أن عزم متجهة بالنسبة لمحور Δ هو مقياس جبري فإن العزم بالنسبة للمستقيم هو التجهيزة المحمولة على المحور

$$g = (\vec{V}.\Delta) = (\vec{V}, \Delta).\vec{u}$$

نضرب داخليا في $\vec{u}$

$$g.\vec{u} = (\vec{V}, \Delta)\vec{u}.\vec{u}$$

$$\Rightarrow (\vec{V}, \Delta) = g.\vec{u}$$

$$(\vec{V}, \Delta) = \vec{g} = (\vec{u}.\vec{OA}.\vec{V}).u$$

تمارين تطبيقية: (التمرين الأول)

1.
$$\vec{A_1A_2} = \vec{OA_1} - \vec{OA_2}$$

$$\vec{OA_1} = \vec{A_1A_2} + \vec{OA_2}$$

$\vec{OA_1} \stackrel{?}{=} \vec{A_1O}$ برهن ذلك.

التمرين الثاني:

* اوجد عزم الشعاع $\vec{V}(2, 1, 3)$ ومبدؤه $A(0, 1, 0)$ بالنسبة لنقطة $C(0, 0, 5)$

$$\vec{G} \stackrel{?}{=} \vec{CA} \wedge \vec{V}$$

* اوجد $\vec{u} = \frac{\vec{H}}{|H|}$ بالنسبة للمحور Δ مار من $\vec{G}$ ديبارزي $g(\vec{u}, \vec{OA}, \vec{V})$

$$g.\vec{u} = \vec{g} = (\vec{V}, \Delta)$$

التمرين الثالث:

لتكن لدينا D، B.C، A اربع نقاط بيّن أن $\vec{G}$ هو محصلة عزوم $\vec{BC}$، $\vec{CD}$، $\vec{DA}$ بالنسبة لنقطة O عمودي على كل من $\vec{BD}$، $\vec{AC}$

إعداد: جيهان مصطفى
فريق سيرياماث