◄ دكتور المادة: جبران جبران

◄ المحاضرة الأولى

عنوان المحاضرة : الفضاءات المترية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ الفضاءات المترية و دالة المسافة (المترك)

٢ـ بعض دوال المسافة الشهيرة و أمثلة عن دوال مسافة أخرى

٣ـ الكرة المفتوحة و الكرة المغلقة

الفضاءات المترية : لتكن X مجموعة غير خالية و ندعو التابع d المعرف بالشكل التالي:

$$d: X \times X \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto d(x, y)$$

بأنه **تابع مسافة** على X إذا تحقق ما يلي :

$$1 - \forall x, y \in X \; ; d(x, y) \geq 0$$
$$2 - \forall x, y \in X \; : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$
$$3 - \forall x, y \in X \; ; d(x, y) = d(y, x)$$
$$4 - \forall x, y, z \in X \; ; d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

و ندعو عندئذٍ الثنائية (X, d) فضاءً مترياً

و لنفسر قليلاً الشروط السابقة :

الشرط الأول : يجب أن يكون تابع المسافة غير سالب دوماً (أكبر أو يساوي الصفر)

الشرط الثاني : إذا كانت المسافة بين نقطتين من X معدومة فإن النقطتان حتماً متساويتان

الشرط الثالث : تابع المسافة يحقق خاصية التناظر ((المسافة بين y و x نفسها المسافة بين xوy))

الشرط الرابع : متراجحة المثلث

و بالتالي حتى نقول عن تابع ما إنه تابع مسافة لا بد أن يحقق الشروط الأربعة السابقة و في حال كان التابع لا يحقق أحد هذه الشروط على الأقل لن يكون تابع مسافة .

مثال : ليكن $X = \mathbb{R}$ و لنعرف الدالة التالية:

$$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}; d(x,y) = |x-y|$$

أثبت أن هذه الدالة تشكل دالة مسافة على X

الحل: حتى تكون دالة مسافة يجب أن تحقق الشروط الأربعة الواردة في تعريف دالة المسافة :

الشرط الأول :(غير سالب)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\,; d(x,y) = |x-y| \geq 0$$

و ذلك حسب تعريف دالة القيمة المطلقة

الشرط الثاني :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\,; d(x,y) = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x-y = 0 \iff x = y$$

الشرط الثالث :(التناظر)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}; d(x,y) = |x-y| = |-(y-x)| = |y-x| = d(y,x)$$

الشرط الرابع:(متراجحة المثلث) :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\,; d(x,z) = |x-z| = |x-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}-z| \underbrace{\leq}_{\text{خواص قيمة مطلقة}} \underbrace{|x-y|}_{d(x,y)} + \underbrace{|y-z|}_{d(y,z)}$$

و هذا يبين أن : $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

من تحقق الشروط الأربعة نجد أن d تابع مسافة على $\mathbb{R}$ **((ندعو هذه الدالة بالمسافة المألوفة على $\mathbb{R}$))**

مثال(وظيفة) : ليكن $X = \mathbb{R}^2$ و لنعرف على X الدالة التالية :

$d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$\forall z_1=(x_1,y_1),z_2(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2; d(z_1,z_2)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$

الحل : حتى تكون دالة مسافة يجب أن تحقق الشروط الأربعة الواردة في تعريف دالة المسافة :

$$\forall z_1=(x_1,y_1),z_2=(x_2,y_2),z_3=(x_3,y_3)\in\mathbb{R}^2\ ;$$

الشرط الأول :(غير سالب)

$$d(z_1,z_2)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|\geq 0$$

و ذلك حسب تعريف دالة القيمة المطلقة

الشرط الثاني :

$$d(z_1,z_2)=0\ \Leftrightarrow |x_1-x_2|+|y_1-y_2|=0$$

و لكن إذا كان مجموع مقادير غير سالبة هو الصفر فإن كل من هذه المقادير معدوم أي :

$$\begin{cases}|x_1-x_2|=0\Leftrightarrow x_1=x_2\\ |y_1-y_2|=0\Leftrightarrow y_1=y_2\end{cases}\Longrightarrow (x_1,y_1)=(x_2,y_2)\Longrightarrow z_1=z_2$$

الشرط الثالث :(التناظر)

$$d(z_1,z_2)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|=d(z_2,z_1)$$

الشرط الرابع:(متراجحة المثلث) :

$$d(z_1,z_3)=|x_1-x_3|+|y_1-y_3|$$

$$=|x_1-\boldsymbol{x_2}+\boldsymbol{x_2}-x_3|+|y_1-\boldsymbol{y_2}+\boldsymbol{y_2}-y_3|$$

$$\underset{\text{خواص قيمة مطلقة}}{\leq}\ \ |x_1-x_2|+|x_2-x_3|+|y_1-y_2|+|y_2-y_3|$$

$\boldsymbol{d(z_1,z_2)}$ $\boldsymbol{d(z_2,z_3)}$

و هذا يبين أن : $d(z_1,z_3)\leq d(z_1,z_2)+d(z_2,z_3)$

من تحقق الشروط الأربعة نجد أن ***d*** تابع مسافة على $\mathbb{R}^2$

مثال : ليكن $X = \mathbb{R}^2$ و لنعرف على $\mathbb{R}^2$ الدالة التالية :

$$d_\infty : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 ; d_\infty(z_1, z_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

أثبت أن d_∞ دالة مسافة على $\mathbb{R}^2$

الحل : حتى تكون دالة مسافة يجب أن تحقق الشروط الأربعة الواردة في تعريف دالة المسافة :

$$\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2), z_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2 ;$$

الشرط الأول :(غير سالب)

$$d_\infty(z_1,z_2)=\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}\geq 0$$

القيمة العظمى لمقادير غير سالبة هو مقدار غير سالب

الشرط الثاني :

$$d_\infty(z_1,z_2)=0 \Leftrightarrow \max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}=0$$

و لكن إذا كانت القيمة العظمى لمقادير غير سالبة هو الصفر فإن كل من هذه المقادير معدوم أي :

$$\begin{cases}|x_1-x_2|=0 \Leftrightarrow x_1=x_2\\ |y_1-y_2|=0 \Leftrightarrow y_1=y_2\end{cases} \Rightarrow (x_1,y_1)=(x_2,y_2) \Rightarrow z_1=z_2$$

الشرط الثالث :(التناظر)

$$\begin{aligned}d_\infty(z_1,z_2)&=\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}=\max\{|x_2-x_1|,|y_2-y_1|\}\\ &=d_\infty(z_2,z_1)\end{aligned}$$

الشرط الرابع:(متراجحة المثلث): علينا إثبات أن : $d_\infty(z_1,z_3)\leq d_\infty(z_1,z_2)+d_\infty(z_2,z_3)$

لدينا :

$$d_\infty(z_1,z_3)=\max\{|x_1-x_3|,|y_1-y_3|\}$$

و لنفرض أن $\max\{|x_1-x_3|,|y_1-y_3|\}=|x_1-x_3|$ (و هذا لا يؤثر على عمومية المسألة)

إذن :

$$\begin{aligned}&d_\infty(z_1,z_3)=|x_1-x_3|\\ &=|x_1-\boldsymbol{x_2}+\boldsymbol{x_2}-x_3|\leq \underbrace{|x_1-x_2|}_{\leq\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}}+\underbrace{|x_2-x_3|}_{\leq\max\{|x_2-x_3|,|y_2-y_3|\}}\\ &\leq \max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}+\max\{|x_2-x_3|,|y_2-y_3|\}=d_\infty(z_1,z_2)+d_\infty(z_2,z_3)\end{aligned}$$

فهو تابع مسافة

نتيجة: يمكن تعريف أكثر من دالة مسافة على نفس المجموعة

مثال : لتكن $X\neq\phi$ و لنعرف عليها التابع :

$$\forall x,y \in X; d(x,y) = \begin{cases} 0 & : x = y \\ 1 & : x \neq y \end{cases}$$

أثبت أنها دالة مسافة على X

الحل : حتى تكون دالة مسافة يجب أن تحقق الشروط الأربعة الواردة في تعريف دالة المسافة :

الشرط الأول :(غير سالب)

$$\forall x,y \in \mathbb{R}\, ; d(x,y) \geq 0$$

لأن مجموعة قيم هذه الدالة هي $\{0,1\}$

الشرط الثاني : محقق وضوحاً حسب تعريف الدالة d

الشرط الثالث :(التناظر): محقق وضوحاً حسب تعريف الدالة d

الشرط الرابع:(متراجحة المثلث) :علينا إثبات أن :

$$\forall x,y,z \in \mathbb{R}\, ; d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

و هنا نميز حالتين :

١- إذا كان $\mathrm{x} = \mathrm{z}$ فإن: $d(x,z) = 0 \leq d(x,y) + d(y,z)$ ((لأن الطرف الثاني إما أن يكون *0+0* أو *0+1* أو *1+1* و في كل الحالات تتحقق المتراجحة))

٢- إذا كان $\mathrm{x} \neq \mathrm{z}$ عندئذٍ: $\mathrm{d(x,z)} = 1$ و هنا (إما $x = y$ و بالتالي $\mathrm{z} \neq \mathrm{y}$ أو $y = z$ و بالتالي $y \neq x$)) وهنا يكون $\mathrm{d(x,y)} = 0 \,\&\, \mathrm{d(y,z)} = 1$ أو $\mathrm{d(x,y)} = 1 \& \mathrm{d(y,z)} = 0$
و في كلا الحالتين يكون :

$$d(x,z) = 1 \leq d(x,y) + d(y,z) = 0 + 1 = 1$$

من تحقق الشروط الأربعة نجد أن *d* تابع مسافة على*X* ندعوه **تابع المسافة المتقطعة**

مثال : هل يشكل التابع *d* المعرف بالشكل التالي تابع مسافة على $\mathbb{R}^2$:

$$d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$d\big((x,y),(x',y')\big) = |x - x'|$$

الحل : إن التابع السابق لا يشكل تابع مسافة نظراً لأنه لا يحقق الشرط الثاني من شروط تابع المسافة

فمثلاً من أجل العنصرين $(1,2),(1,3) \in \mathbb{R}^2$ فإن :

$$d\big((1,2),(1,3)\big) = |1-1| = 0$$

إلا أن $(1,2) \neq (1,3)$

- الآن و بعد أن تعرفنا و بشكل موسع جداً على الفضاءات المترية و دوال المسافة سنبدأ بموضوع جديد و ندرس الكرات المفتوحة و المغلقة في فضاء متري ما :

الكرة المفتوحة في فضاء متري : ليكن (X,d) فضاءً مترياً و لتكن $a \in X$ و $r > 0$ عدد حقيقي ، نعرف الكرة المفتوحة التي مركزها a و نصف قطرها r بأنها مجموعة عناصر X التي بعدها عن النقطة a **أصغر** من r و نرمز لها بالرمز $N_d(a,r)$ ، بتعبير رياضي يكون :

$$N_d(a,r) = \{x \in X : d(x,a) < r\}$$

الكرة المغلقة في فضاء متري : ليكن (X,d) فضاءً مترياً و لتكن $a \in X$ و $r > 0$ عدد حقيقي ، نعرف الكرة المغلقة التي مركزها a و نصف قطرها r بأنها مجموعة عناصر X التي بعدها عن النقطة a **أصغر أو يساوي** r و نرمز لها بالرمز $B_d(a,r)$ ، بتعبير رياضي يكون :

$$B_d(a,r) = \{x \in X : d(x,a) \leq r\}$$

مثال : لنأخذ $X = \mathbb{R}$ و d هي المسافة المألوفة على $\mathbb{R}$ أوجد $N_d(a,r)$ حيث $a \in \mathbb{R}, r > 0$

الحل : نعلم أن تابع المسافة المألوف في $\mathbb{R}$ هو $d(x,y) = |x-y|$

$$\begin{aligned}
&N_d(a,r) = \{x \in \mathbb{R} : d(x,a) < r\} = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : -r < x-a < r\} = \{x \in \mathbb{R} : a-r < x < a+r\} \\
&\Rightarrow N_d(a,r) =]a-r, a+r[
\end{aligned}$$

مثال : لنأخذ $X = \mathbb{R}$ و d هي المسافة المتقطعة على $\mathbb{R}$ أوجد $N_d(0,1.2), N_d(0,1), N_d\left(0,\frac{1}{2}\right)$

الحل : نعلم أن تابع المسافة المتقطعة يعطى بالشكل:

$$\forall x,y \in X; d(x,y) = \begin{cases} 0 & : x = y \\ 1 & : x \neq y \end{cases}$$

$$N_d\left(0,\frac{1}{2}\right) = \left\{x \in X : d(x,0) < \frac{1}{2}\right\} = \{0\}$$

$$N_d(0,1) = \{x \in X : d(x,0) < 1\} = \{0\}$$

$$N_d(0,1.2) = \{x \in X : d(x,0) < 1.2\} = \mathbb{R}$$

لا تتحقق إلا عندما تكون d(x,0)=0 و هذا يكون فقط عندما x=0

لا تتحقق إلا عندما تكون d(x,0)=0 و هذا يكون فقط عندما x=0

إن d(x,0) إما أن تكون 0أو أن تساوي 1 و بالتالي هي دائماً أصغر من 1,2 لكل x من R

انتهت المحاضرة

صفحتنا على فيسبوك: IOM الرابط : facebook.com/MathemagicTeam/	مجموعة السنة الثانية : Improve Our Mathematics	مجموعة السنة الأولى: طلاب كلية العلوم قسم الرياضيات في جامعة دمشق ٢٠١٧

إعداد: عبد الرحمن البحش – شهناز طاطيش – نذير تيناوي