الموضوع الأحد - المحاضرة الأولى التاريخ ٢٠١٧/٣/١٢

مفردات مقرر الجبر الخطي ٢: المحاضرة الأولى

مرفق سبورة ياماتي

١- الحدودية المميزة والأصغرية المصغوفة مربعة وتأثير خطي.

٢- القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المصغوفة مربعة وتأثير خطي

٣- الفضاء الثنوي. Dual space

٤- الأشكال الخطانية.

٥- فضاءات الضقة ذات الجداء الداخلي.

٦- المؤثرات على الفضاءات الواحدية (المعقدة)

تذكرة:

اذا كان V و W فضائين شعاعيين معرفين على حقل F

و $L: V \longrightarrow W$ تطبيق حيث $\forall \lambda \in F, u, v \in V$

① $L(u+v) = L(u) + L(v)$

② $L(\lambda u) = \lambda L(u)$

وإذا كان: $V = W$ سنسمي التطبيق الخطي

$L: V \longrightarrow V$ مؤثر خطي.

تذكير بالفصل الأول:

مصفوفة التطبيق الخطي: ليكن V و W فضائين شعاعيين معرفين على حقل F بحيث يكون بعد V هو n

وبعد W هو m اي $\dim(V) = n$ و $\dim(W) = m$

Scanned by CamScanner

ولتكن $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ قاعدة مرتبة لـ V

و $B=\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ قاعدة مرتبة لـ W

ولتكن $L: V \to W$ تطبيق خطي عندئذ:

$a_i \in W$

$a_1 \in W$ $L(a_1) = \lambda_{11} b_1 + \lambda_{21} b_2 + \dots + \lambda_{m1} b_m$

$L(a_2) = \lambda_{12} b_1 + \lambda_{22} b_2 + \dots + \lambda_{m2} b_m$

$\vdots$

$L(a_n) = \lambda_{1n} b_1 + \lambda_{2n} b_2 + \dots + \lambda_{mn} b_m$

فتكون مصفوفة التطبيق L بالنسبة للقاعدتين A و B هي:

$$H = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \dots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}$$

تذكير:

G قاعدة لـ V الفضاء الشعاعي $\iff$ ① G مولدة لـ V $V = \mathrm{Span} G$

② G مستقلة خطيا.

$H \in M_{mn}(F)$ الذي عدد اسطرها يحدد المستقر و عدد اعمدته يحدد المنطلق.

مثال:

ليكن التطبيق الخطي $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ المعرف كما يلي

$L(x,y,z) = (x+y+z, x-y-z)$

اوجد مصفوفة L بالنسبة للقاعدتين:

$A = \{a_1=(1,1,1), a_2=(1,0,1), a_3=(1,0,0)\}$

Scanned by CamScanner

$B = \{b_1 = (0,1) \ , b_2 = (1,1)\}$

الحل:

نعبر عناصر قاعدة المنطلق بدلالة عناصر قاعدة المستقر.

$L(a_1) = L(1,1,1) = (3,-1)$

$L(a_2) = L(1,0,1) = (2,0)$

$L(a_3) = L(1,0,0) = (1,1)$

$L(a_1) = (3,-1) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = \lambda_1(0,1) + \lambda_2(1,1)$

$= (\lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2)$

$\Rightarrow \lambda_2 = 3 \ , \ \lambda_1 = -4 \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -1 \Rightarrow 2\lambda_1 = -4$

$L(a_2) = (2,0) = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 = \mu_1(0,1) + \mu_2(1,1)$

$= (\mu_2, \mu_1 + \mu_2)$

$\Rightarrow \mu_2 = 2 \ , \ \mu_1 = -2$

$L(a_3) = (1,1) = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 = \alpha_1(0,1) + \alpha_2(1,1)$

$= (\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2)$

$\Rightarrow \alpha_2 = 1 \ , \ \alpha_1 = 0$

$L(a_1) = -4b_1 + 3b_2$

$L(a_2) = -2b_1 + 2b_2$

$L(a_3) = 0\,b_1 + 1\,b_2$

FARAH.

Scanned by CamScanner

$$H = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

طلب إضافي:

أوجد مصفوفة التطبيق L بالنسبة للقاعدتين القانونيتين.

الحل:

نعلم أن: $E_2 = \{b_1 = (1,0), b_2 = (0,1)\}$ قاعدة $\mathbb{R}^2$

$$E_3 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$$

$$L(e_1) = L(1,0,0) = (1,1) = 1\,b_1 + 1\,b_2$$
$$L(e_2) = L(0,1,0) = (1,-1) = 1\,b_1 + (-1)\,b_2$$
$$L(e_3) = L(0,0,1) = (1,-1) = 1\,b_1 + (-1)\,b_2$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

مصفوفة الاستقال:

ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل F بُعده n وليكن $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ، $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ قاعدتين مرتبتين للفضاء V . ونعرف التطبيق الخطي:

$$I : V \longrightarrow V$$
$$v \longrightarrow I(v) = v$$

Scanned by CamScanner

ثم نوجد مصفوفته بالنسبة للقاعدتين A و B

$(A \to B)$

$$a_1 = I(a_1) = \lambda_{11} b_1 + \lambda_{21} b_2 + \dots + \lambda_{n1} b_n$$
$$a_2 = I(a_2) = \lambda_{12} b_1 + \lambda_{22} b_2 + \dots + \lambda_{n2} b_n$$
$$\vdots$$
$$a_n = I(a_n) = \lambda_{1n} b_1 + \lambda_{2n} b_2 + \dots + \lambda_{nn} b_n$$

$$P_{(A \to B)} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

وهي مصفوفة مربعة من المرتبة n.
وقابلة لذلك: التطبيق الخطي هو مؤثر خطي تماثل.

ملاحظة:
إذا كانت P مصفوفة الانتقال من A إلى B
Q مصفوفة الانتقال من B إلى A
$$Q = P^{-1}$$

Scanned by CamScanner