— ج٣ تحليل المتجهات ومبادئ الهندسة التفاضلية ع٤ —

ملاحظات:

١) اذا كان إحدى المتجهين معدوماً فإن الجداء المتجهي لهما هو الشعاع الصفري أي $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$

٢) $\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$

٣) $\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$

٤) $\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$

$$\vec{a} \wedge \vec{a} = -(\vec{a} \wedge \vec{a})$$

ننقل إلى طرف واحد $2(\vec{a} \wedge \vec{a}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \wedge \vec{a} = 0$

٥) $(\lambda \vec{a}) \wedge \vec{b} = \lambda (\vec{a} \wedge \vec{b})$

٦) $(\lambda \cdot \vec{a}) \wedge (\mu \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot \mu (\vec{a} \wedge \vec{b})$

مثال: $\vec{i} \wedge \vec{j} \,,\, \vec{j} \wedge \vec{i}$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 + 1\vec{k} = \boxed{\vec{k}}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{-\vec{k}}$$

ملاحظات:

$\vec{i} = (1, 0, 0)$

$\vec{j} = (0, 1, 0)$

$\vec{k} = (0, 0, 1)$

تمرين ⑪

برهن أن

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$$

حسب التعريف

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$$

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$$

نربع ونجمع ونحصل على المطلوب

لاثبات عدم صحة علاقة يكفي إيجاد اي مثال .

نتيجة ①

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})\neq(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C}$$

الجداء الخارجي ليس تبديلي ولا تجميعي

نتيجة ②

$$\vec{a}\wedge(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\vec{c}$$

في جملة نظامية إذا كان $\vec{A}(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{B}(b_1,b_2,b_3)$ فإن :

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

$$=\vec{C}(c_1,c_2,c_3)$$

ملاحظة :
إذا كان ABC مثلث
فإن $S=\frac{1}{2}|\vec{AB}\wedge\vec{AC}|$
وهي مساحة المثلث
الناتج $S>0$ وهو عدد

الجداء المختلط :

ليكن $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ ثلاثة متجهات نعرف الجداء العددي لـ $\vec{A}\wedge\vec{B}$ و $\vec{C}$ أي

$$(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot\vec{C}=\vec{C}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})$$

بالجداء المختلط ونرمزله بـ $(\vec{A},\vec{B},\vec{C})$ وهو قيمة جبرية ، قيمته المطلقة حجم متوازي السطوح المنشأ للأشعة $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$

أي :

$$|(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})| = |(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C}|$$

$$= |\vec{A} \wedge \vec{B}| \cdot |\vec{C}|$$

حجم متوازي السطوح

مساحة متوازي الاضلاع

الارتفاع

متوازي السطوح هو متوازي أضلاع بالفضاء

نتائج:

1) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$

* أي إذا أجرينا تبديلاً على الترتيب في الأشعة بشكل دوري فإن قيمة الجداء المختلط لا يتغير

∴ أما إذا بادلنا بين شعاعين متتاليين وتركنا الثالث في مكانه فإن الجداء تتغير إشارته.

2) $(\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$

3) $(\alpha \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \alpha(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

$(\alpha \vec{a}, \beta \vec{b}, \gamma \vec{c}) = \alpha \beta \gamma (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

4) الشرط اللازم والكافي لتكون الأشعة $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ مرتبطة خطياً هو أن ينعدم الجداء المختلط لها، أي

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ مرتبطة خطياً $\iff (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$

* اذا كان

$\vec{A}(a_1, a_2, a_3)$

$\vec{B}(b_1, b_2, b_3)$

$\vec{C}(c_1, c_2, c_3)$

فإن

$$(\vec{A}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

الجداء الثلاثي لمشعاعين : ((دستور مهم))

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$$

((الثلاثي شعاع))

سؤال امتحاني !!

جداء أربعة أشعة :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}).(\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a}.\vec{c}).(\vec{b}.\vec{d}) - (\vec{a}.\vec{d})(\vec{b}.\vec{c})$$

((البرهان مطلوب))

* سوف يتم اعطاء البرهان المحاضرة القادمة .

تمرين ③

إذا كانت $\vec{w}$، $\vec{v}$، $\vec{u}$ أشعة غير صفرية غير متوازية تحقق :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{w} + \vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

اثبت أن $\vec{w}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{u}$ تقع في مستوٍ واحد

البرهان

* نضرب الطرفين د $\vec{w}$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} + (\vec{v} \wedge \vec{w}).\vec{w} + (\vec{w} \wedge \vec{u}).\vec{w} = 0$$

حتى تكون في مستوٍ واحد يجب أن تكون مرتبطة خطياً => متوازي م

الانطلاق حالة خاصة من التوازي

$$(\vec{u}.\vec{v}.\vec{w}) + (\vec{v}.\vec{w}.\vec{w}) + (\vec{w}.\vec{u}.\vec{w}) = 0$$

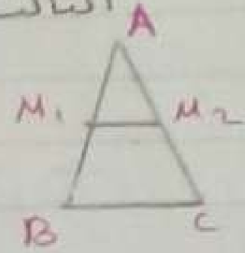
لأنه إذا بادلنا بين شعاعين تتغير الاشارة

$$(\vec{u}.\vec{v}.\vec{w}) = 0$$

أي أن $\vec{w}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{u}$ مرتبطة خطياً وغير متوازية أي تقع في مستوٍ واحد

تمرين (٣)

ليكن ABC مثلث، لتكن M_1 ، M_2 منتصفي AB و AC برهن أن الخط الواصل بين منتصفي ضلعين في مثلث يساوي نصف الضلع الثالث ، المطلوب $\overrightarrow{M_1M_2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$



$\overrightarrow{M_1A}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

لأنه بالفرض M_1 ناصفة $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1A}+\overrightarrow{AM_2}$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$\overrightarrow{M_1M_2} \parallel \overrightarrow{CB}$ لأنها مرتبطة خطياً $\overrightarrow{M_1M_2}$ ينتج عن $\overrightarrow{BC}$ بضربه بـ $\frac{1}{2}$

تمرين (٤)

احسب حجم الهرم الذي رؤوسه هي

$A(1,2,0)$. $B(2,3,1)$, $C(1,5,3)$ $D(1,2,1)$

وظيفة :-

علماً أن جداء الأشعة هو الحجم ؟؟ ❤

تمرين (٥)

ليكن $\vec{w}$, $\vec{v}$, $\vec{u}$ ثلاث أشعة غير صفرية وغير مستوية، لنفرض $\vec{g}$ شعاع يحقق $\vec{g}\cdot\vec{v}=\vec{g}\cdot\vec{w}=\vec{0}$

$$\vec{g}\cdot\vec{u}=1$$

برهن أن
$$\vec{g}=\frac{\vec{v}\wedge\vec{w}}{(\vec{u},\vec{v},\vec{w})}$$

أوجد $\vec{g}$ إذا كان
$$\vec{u}=\vec{i}$$
$$\vec{v}=\vec{j}$$
$$\vec{w}=\vec{k}$$

وظيفة :-

إعداد : جيهان مصطفى

فريق : أسير يا ماث ؟؟