نظري

◄ دكتور المادة: ريم الحاج خليفة

◄ المحاضرة الأولى

عنوان المحاضرة : نظرية الحلقات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- مفاهيم اساسية (تعريف الحلقات مع أمثلة) .

٢- الحلقة الجزئية مع مبرهنة .

٣- أمثلة على الحلقة الجزئية .

سنبدأ معكم اصدقائي بمقرر البنى الجبرية (٢) أو ما يسمى بنظرية الحلقات (Ring Theory)

مفاهيم اساسية :

تعريف الحلقة : لتكن $\mathcal{R}$ مجموعة غير خالية مزودة بقانوني تشكيل داخليين الأول $(+)$ والثاني $(.)$ نقول عن البنية $(\mathcal{R}, +, .)$ أنها حلقة إذا وفقط أذا تحققت الشروط التالية :

$$\forall\ a, b, c \in\ \mathcal{R}$$

١- يوجد عنصر حيادي بالنسبة لعملية الجمع ونرمز له بـ 0 يحقق

$$a + 0 = 0 + a = a$$

٢- تجميعية

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

٣- لكل عنصر نظير جمعي أي

$$\forall\ r \in \mathcal{R}: \exists - r \in \mathcal{R}: r + (-r) = r - r = 0$$

٤- تبديلية

$$a + b = b + a$$

إن الشروط الأربعة الأولى تتلخص بكون $(\mathcal{R}, +)$ زمرة تبديلية .

٥- التجميعية (بالنسبة للضرب) وهذا الشرط مع شرط الضرب الداخلي يجعل $(\mathcal{R},.)$ شبه زمرة (نصف زمرة)

$$(a.b)c = a(b.c)$$

٦- الضرب توزيعي على الجمع ((**.**) توزيعي على (**+**)) (من اليمين ومن اليسار)

$$a.(b+c) = a.b + a.c$$
$$(b+c)a = b.a + c.a$$

تعاريف :

١) تسمى $\mathcal{R}$ حلقة تبديلية إذا تحققت

$$\forall\, a, b \in \mathcal{R} : a.b = b.a$$

(اي اذا كانت خاصية التبديلية الضربية محققة نقول عن الحلقة انها تبديلية اما خاصة التبديلية **الجمعية** فهي اساسية بالتعريف ولا علاقة لها بتبديلية الحلقة ابدا).

٢) نقول عن العنصر $e_1 \in \mathcal{R}$ أنه عنصر محايد (ضربي) من اليمين اذا تحقق الشرط التالي :

$$c.e_1 = c \quad : \forall c \in \mathcal{R}$$

٣) نقول عن العنصر $e_2 \in \mathcal{R}$ أنه عنصر محايد (ضربي) من اليسار اذا تحقق الشرط التالي :

$$e_2.c = c \quad : \forall c \in \mathcal{R}$$

٤) نقول عن العنصر $e \in \mathcal{R}$ أنه محايد اذا تحقق الشرط التالي :

$$e.c = c.e = c \quad : \forall c \in \mathcal{R}$$

يكون المحايد من اليمين يساوي المحايد من اليسار اذا كانت $\mathcal{R}$ تبديلية .

نتيجة : الشرط اللازم والكافي ليكن العنصر e عنصراً محايداً في $\mathcal{R}$ هو أن يكون محايداً من اليمين ومن اليسار في ان واحد أما المحايد الجمعي فيدعى صفر الحلقة .

٥) نقول عن الحلقة $\mathcal{R}$ أنها واحدية اذا وجد فيها محايد ضربي .

أمثلة :

١- $(\mathbb{Z},+,.)$ حلقة واحدية تبديلية .

٢- $Z_n = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots \dots \dots .., (n-1)\}$ تشكل حلقة تبديلية واحدية .

٣- من أجل $n > 1$ فإن $(n\mathbb{Z}, +, .)$ حلقة تبديلية لكن غير واحدية .

مثال : $2\mathbb{Z} = \{0, \mp 2, \mp 4, \mp 6 \dots \dots \dots\} =< 2 >$

٤- $(\mathcal{M}_{n\times n}, +, \cdot)$(المصفوفة المربعة) تشكل حلقة واحدية وليست تبديلية (الضرب غير تبديلي في المصفوفات) .

٥- مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ليست حلقة لأنها من الأساس ليست زمرة .

الحلقة الجزئية : ليكن $\mathcal{R}$ حلقة و S مجموعة جزئية غير خالية من $\mathcal{R}$ نقول عن المجموعة S أنها حلقة جزئية في $\mathcal{R}$ اذا كانت S تشكل حلقة بحد ذاتها (بالنسبة للعمليتين المعرفتين على $\mathcal{R}$) .

مبرهنة : لتكن $\mathcal{R}$ حلقة و S مجموعة جزئية غير خالية من $\mathcal{R}$ الشرط اللازم والكافي لتكون S حلقة جزئية في $\mathcal{R}$ هو أن يتحقق الشرطان الآتيان :

١) $\forall a, b \in S \quad ; \quad a - b \in S$
٢) $\forall a, b \in S \quad ; \quad a.b \in S$

البرهان : لزوم الشرط لنفرض أن S حلقة جزئية من الحلقة $\mathcal{R}$ عندئذٍ S تحقق جميع الشروط السابقة (التي وردت سابقا في تعريف الحلقة) هذا يعني أنه :

$$\forall\, a, b \in S :$$

$$a - b \in S \ \& \ ab \in S$$

اي الشرطان محققان .

كفاية الشرط بفرض أن S تحقق الشروط :

$$\forall\, a, b \in S \,;\, a - b \in S \quad \& \quad a.b \in S$$

ولما كانت $\mathcal{R}$ حلقة عندئذٍ تشكل $\mathcal{R}$ زمرة تبديلية بالنسبة للجمع ولما كانت المجموعة S تحقق الشرط :

$$\forall\, a, b \in S \,; a - b \in S$$

فإن $(S, +)$ **زمرة**.

ولما كانت S مغلقة بالنسبة للضرب ولأن $\mathcal{R}$ حلقة فإن S تحقق شرط التجميعية (بالنسبة للضرب)

فإن $(S, .)$ **نصف زمرة** .

ونلاحظ أن شرط توزيع الضرب على الجمع محقق من اليمين واليسار فنجد أن $\boldsymbol{S}$ حلقة جزئية في $\mathcal{R}$.

أمثلة :

١- لتكن $\mathcal{R}$ حلقة عندئذٍ المجموعة $\{0\}$ هي تشكل حلقات جزئية من $\mathcal{R}$ وتسمى الحلقة الجزئية التافهة .

٢- ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً إن المجموعة $n\mathbb{Z} = \{0, \pm n, \pm 2n, \pm 3n, \dots \dots ..\}$

هل تشكل حلقة جزئية ؟

الحل : (يكون الحل بالتحقق من الشرطين الموجودين بالمبرهنة الأخيرة)

$$\forall\, a, b \in n\mathbb{Z} : a = n.s\,, b = n.t \qquad : s, t \in \mathbb{Z}$$

$$a - b = n.s\ - n.t = n\underbrace{(s - t)}_{\in\mathbb{Z}} \Rightarrow a - b \in n\mathbb{Z}$$

الشرط الاول تحقق

$$a.b = n.s.(n.t) = n\underbrace{(s.n.t)}_{\in\mathbb{Z}} \Rightarrow a.b \in \mathbb{Z}$$

الشرط الثاني تحقق

وبالتالي المجموعة $n\mathbb{Z}$ هي حلقة جزئية من حلقة الأعداد الصحيحة .

وهذه المجموعة هي حلقة واحدية وتبديلية

ولكن عندما تكون $n > 1$ عندئذٍ لا يوجد عنصر محايد بالنسبة للضرب .

٣- $S = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$

هل تشكل المجموعة S حلقة جزئية من $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ ؟

ليكن $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - c & 0 \\ 0 & b - d \end{bmatrix} \in S$

الشرط الأول تحقق لأن a, b, c, d أعداد موجودة في المجموعة $\mathbb{Z}$

وليكن $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a.c & 0 \\ 0 & b.d \end{bmatrix} \in S$

الشرط الثاني تحقق اذاً S حلقة جزئية من الحلقة $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

هل هذه الحلقة واحدية ؟

نعم لأن $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ هو عنصر محايد أي أنه يمكن أن تكون $a = b = 1$.

انتهت المحاضرة

إعداد: لبنى الطون – محمد فهمي القاضي – أحمد ابو التوت