◀ استاذة المادة: بشرى جاد الله

◀ المحاضرة : الأولى عنوان المحاضرة : تمارين

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ مراجعة تعريف الحلقة .

٢ـ أمثلة وتمارين .

تعريف الحلقة:

لتكن $\mathcal{R}$ مجموعة غير خالية مزودة بقانوني تشكيل داخليين الاول (+) والثاني (.) عندئذٍ تكون $\mathcal{R}$ حلقة اذا تحقق:

١- $(\mathcal{R},+)$ زمرة تبديلية .

٢- $(\mathcal{R},.)$ شبه زمرة .

٣- الضرب توزيعي على الجمع .

تمرين :

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية ومعرف عليها قانون تشكيل آخر بالشكل $\forall a,b \in G : a.b = 0$

أثبت أن $(G,+,.)$ حلقة تبديلية .

الحل:

١- نجد أن الشرط الأول محقق فرضاً لأن $(G,+)$ زمرة تبديلية .

٢- $\forall\, a,b \in G : a.b = 0 \in G$

$$\forall c \in G : a(b.c) = a.0 = 0$$

$$(a.b).c = 0.c = 0$$

أي أن G تجميعية .

٣- $a.(b+c) = 0 \quad \Rightarrow ab + ac = 0 + 0 = 0$

$$(b+c).a=0 \quad \Rightarrow ba+ca=0+0=0$$

أي أن الضرب توزيعي على الجمع

و أنها تبديلية

$$a.b=b.a=0$$

ومنه فإن $(G,+,.)$ حلقة تبديلية.

تمرين:

إذا كانت S مجموعة جميع التطبيقات الحقيقية على مجموعة الأعداد الحقيقية هل $(S,+,o)$ حلقة؟ حيث o هي عملية تركيب التطبيقات .

الحل :

إن عملية تركيب التطبيقات لا تتوزع على الجمع (مثال يثبت ذلك) لتكن لدينا

$$f(x)=2x+1 \quad , \qquad g(x)=x^2 \,, \qquad h(x)=x-2$$

نجد أن $fo(g+h)\neq fog+foh$

ومنه فهمي ليست حلقة .

تمرين : (وظيفة)

لتكن $(\mathcal{R},+,.)$ حلقة تبديلية وليكن $a,b\in\mathcal{R}$ عندئذٍ فإنه من أجل كل عدد صحيح موجب n يتحقق ما يلي :

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

حيث $\binom{n}{i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}$

الحل :

الإثبات سيتم بالاستقراء الرياضي على n فمن أجل $n=1$ نجد أن :

$$\left.\begin{aligned} l_1&=(a+b)^1\\ l_2&=\sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i}a^{1-i}b^i=a+b\end{aligned}\right\} l_1=l_2$$

ليكن $k \geq 1$ عدد صحيح و لنبين أن العلاقة صحيحة من أجل $n = k + 1$

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k = (a+b)\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

و لأن العملية (.) توزيعية على $(+)$ يمكن أن نكتب :

$$(a+b)^{k+1} = a\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i + b\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

و لأن الحلقة تبديلية يمكن بعد التوزيع ان نجمع الحدود كما يلي :

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i+1}b^i + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^{i+1}$$

سنفك الحد الأول من المجموع الأول ، و سنفك الحد الأخير من المجموع الثاني:

$$(a+b)^{k+1} = \mathrm{a}^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i+1}b^i + b^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}a^{n-i}b^{i+1}$$

في المتسلسلة الثانية سنبدل كل i بـ i-1

$$(a+b)^{k+1} = \mathrm{a}^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i+1}b^i + b^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1}a^{n-i+1}b^i$$

و لأننا في زمرة :

$$(a+b)^{k+1} = \mathrm{a}^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}\right]a^{n-i+1}b^i$$

$$(a+b)^{k+1} = \mathrm{a}^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}a^{n-i+1}b^i + b^{n+1}$$

حيث يبرهن على أن :

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}$$

و بذلك يتم المطلوب

تمرين :

لتكن $(\mathcal{R}, +, .)$ وَ $(S, T, *)$ حلقتين تبديليتين واحديتين ولنرمز ب o وَ o' لصفريهما على الترتيب . إذا كانت المجموعة $D = \{(a, b) : a \in \mathcal{R}, b \in S\}$

ولنعرف على D العمليتين الثنائيتين Δ وَ $\perp$ بالشكل :

$$(x,y)\Delta(x_1,y_1) = (x+x_1, yTy_1)$$

$$(x,y) \perp (x_1,y_1) = (x.x_1, y * y_1)$$

وذلك أياً كان $(x,y),(x_1,y_1)$ من D أثبت أن $(D,\Delta,\perp)$ حلقة تبديلية واحدية .

الحل :

نجد أن $D \neq \emptyset$

$$\forall (x,y),(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in D$$

-١ $(x,y)\Delta[(x_1,y_1)\Delta(x_2,y_2)]$

$$(x,y)\Delta(x_1+x_2, y_1Ty_2) \Rightarrow (x+(x_1+x_2), yT(y_1Ty_2))$$

$$\Rightarrow ((x+x_1)+x_2, (yTy_1)Ty_2)$$

$$(x+x_1, yTy_1)\Delta(x_2,y_2) \Rightarrow [(x,y)\Delta(x_1,y_1)]\Delta(x_2,y_2)$$

وبالتالي العملية Δ تجميعية .

-٢ $(x,y)\Delta(x_1,y_1) = \left(\underbrace{x+x_1}_{\in \mathcal{R}}, \underbrace{yTy_1}_{\in S}\right) \in D$

إن (o,o') عنصراً محايداً في المجموعة D بالنسبة للعملية Δ لأنه $o', o \in D$ ولأنه

$$\forall (x,y) \in D \,; (x,y)\Delta(o,o') = (o,o')\Delta(x,y) = (x+0, yTo') = (x,y)$$

-٣ ليكن (x,y) عنصراً ما فإن $(-x,-y)$ هو نظير (x,y) في D بالنسبة للعملية Δ حيث :

$-x$ هو نظير x في $\mathcal{R}$ بالنسبة للعملية $+$

$-y$ هو نظير y في S بالنسبة للعملية T

-٤ $(x,y)\Delta(x_1,y_1) = (x+x_1, yTy_1) = (x_1+x, y_1Ty) = (x_1,y_1)\Delta(x,y)$

ومنه فإن (D,Δ) زمرة تبديلية .

-٥ $(x,y) \perp [(x_1,y_1) \perp (x_2,y_2)] \Rightarrow (x,y) \perp [x_1.x_2, y_1 * y_2]$

$$\Rightarrow x.(x_1.x_2), y*(y_1*y_2) \Rightarrow (x.x_1)x_2, (y*y_1)*y_2$$

$$\Rightarrow (x.x_1, y*y_1) \perp (x_2,y_2) \Rightarrow [(x,y) \perp (x_1,y_1)] \perp (x_2,y_2)$$

أي أن $(D,\perp)$ شبه زمرة .

٦- $(x,y) \perp [(x_1,y_1)\Delta(x_2,y_2)] \Rightarrow (x,y) \perp [(x_1+x_2, y_1 T y_2)]$

$$x.(x_1+x_2), y*(y_1 T y_2) \Rightarrow (x.x_1 + x.x_2, y*y_1 T y*y_2)$$

$$(x.x_1, y*y_1)\Delta(x.x_2, y*y_2)$$

من اليمين بطريقة مشابهة .

أي أن الضرب توزيعي على الجمع ومنه $(D.\Delta,\perp)$ حلقة .

لنثبت أنها تبديلية :

$$(x,y)\perp(x_1,y_1) = (x.x_1, y*y_1) = \left(\underbrace{x_1.x}_{R\text{تبديلي}}, \underbrace{y_1*y}_{S\text{تبديلي}}\right) = (x_1,y_1)\perp(x,y)$$

لنثبت أنها واحدية :

بما أن كلاً من R,S واحديتين فإن وبفرض أن $1 \in R$ واحد الحلقة R

وأن $e \in S$ واحد الحلقة S فإن

$$(x,y)\perp(1,e) = (1,e)\perp(x,y) = (x.1, y*e) = (x,y)$$

ومنه تكون الحلقة واحدية تبديلية .

انتهت المحاضرة

إعداد: لبنى الطون – محمد فهمي القاضي – أحمد ابو التوت