البنى الجبرية ٢

نظري

◄ دكتورة المادة: ريم الحاج خليفة

◄المحاضرة : الثالثة　　عنوان المحاضرة : نظرية الحلقات والحقل

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ قواسم الصفر ومبرهنة تتعلق بخواصها .

٢ـ المنطقة التكاملية .

٣ـ تعريف الحقل .

قواسم الصفر : نعلم أن في النظام العددي أي عددين جداؤهما يساوي الصفر يجب أن يكون أحد العددين يساوي الصفر و هذا الكلام غير محقق دوماً في مجال الحلقات .

امثلة :

١. حلقة المصفوفات ولتكن $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ ولتكن الاعداد a,b,c,d مغايرة للصفر (أي لا تساوي الصفر) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ وبذلك وجدنا أنه في حال ضرب مصفوفتين غير صفريتين يمكن أن تساوي مصفوفة صفرية .

٢. لنأخذ الحلقة $\mathbb{Z}_8 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ ولنأخذ مثلا :

$\begin{cases} 2.4 = 0 \\ 4.4 = 0 \end{cases}$ أحد المضروبين لا يساوي الصفر ونجد أن الناتج يساوي الصفر .

تعريف : ليكن $\mathcal{R}$ حلقة وَ $a \in \mathcal{R}$ مغاير للصفر عندئذٍ :

- نقول عن العنصر a أنه قاسم للصفر من اليسار في $\mathcal{R}$ اذا وجد عنصر وليكن $b \in \mathcal{R}$ وهو مغاير للصفر وتحققت العلاقة $a.b = 0$
- نقول عن العنصر a أنه قاسم للصفر من اليمين في $\mathcal{R}$ اذا وجد عنصر وليكن $b \in \mathcal{R}$ وهو مغاير للصفر بحيث يكون $b.a = 0$
- نقول عن العنصر a أنه قاسم للصفر في الحلقة $\mathcal{R}$ اذا كان قاسماً من اليمين واليسار في آن واحد .

امثلة :

١- حلقة الاعداد الصحيحة لا تحوي قواسم للصفر . (لأنه لا يوجد عددين نضربهما ببعض يعطي الناتج الصفر إلا اذا كان أحد العددين صفر و هذا يناقض التعريف).

٢- حلقة المصفوفات $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ تحوي قواسم للصفر .

٣- المجموعة $\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$ هل تحوي قواسم للصفر ؟

⊙	٠	١	٢	٣	٤
٠	٠	٠	٠	٠	٠
١	٠	١	٢	٣	٤
٢	٠	٢	٤	١	٣
٣	٠	٣	١	٤	٢
٤	٠	٤	٣	٢	١

$\Leftarrow$ الحلقة $\mathbb{Z}_5$ لا تحوي قواسم للصفر .

مبرهنة : كل عنصر قابل للقلب في حلقة واحدية ليس قاسماً للصفر .

البرهان : ليكن $\mathcal{R}$ حلقة واحدية وَ $a \in \mathcal{R}$ مغايراً للصفر وهو عنصر قابل للقلب (فرضاً) وليكن $a^{-1} \in \mathcal{R}$

$$a^{-1}.a = a.a^{-1} = 1 \Longleftarrow$$

عندئذٍ لنفرض أنه يوجد عنصر $w \in \mathcal{R}$ بحيث إما $w.a = 0$ أو $a.w = 0$

لنأخذ العلاقة الاولى :

$$a.w = 0 \Rightarrow a^{-1}(a.w) = a^{-1}.0 = (a^{-1}.a)w = 0 \Rightarrow 1.w = 0 \Rightarrow w = 0$$

لنأخذ العلاقة الثانية :

$$w.a = 0 \Rightarrow (w.a)a^{-1} = 0.a^{-1} \Rightarrow w.(a.a^{-1}) = 0 \Rightarrow w.1 = 0 \Rightarrow w = 0$$

هذا يعني أنه لا يوجد عنصر $w \in \mathcal{R}$ مغايراً للصفر وبالتالي فإن a ليس قاسماً للصفر في الحلقة $\mathcal{R}$.

تعريف : نقول عن الحلقة الواحدية بحيث $\mathcal{R} \neq 0$ أنها تامة إذا كانت لا تحوي قواسم للصفر .

أمثلة :

١- حلقة الأعداد الصحيحة هي حلقة تامة لأنها لا تحوي قواسم للصفر .
٢- حلقة المصفوفات $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ حلقة غير تامة لأنها تحوي قواسم للصفر (كما رأينا في المثال الذي في أول المحاضرة).
٣- حلقة $\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$ هل هي حلقة تامة ؟
نعلم أن $(\mathbb{Z}_5, \oplus, \otimes)$ هي حلقة واحدية ووجدنا انها لا تحوي قواسم الصفر وبالتالي هي تامة .
٤- $\mathbb{Z}_7$ هل هي حلقة تامة ؟. يحل بنفس طريقة ٣ .

المنطقة التكاملية : نقول عن الحلقة التبديلية والواحدية أنها منطقة تكاملية اذا كانت لا تحوي قواسم للصفر .

أمثلة :

١- حلقة الأعداد الصحيحة هي منطقة تكاملية .
٢- الحلقة $\mathbb{Z}_5$ هي منطقة تكاملية (هي تامة وهي تبديلية ايضاً).
٣- حلقة المصفوفات $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ ليست منطقة تكاملية .(في الامتحان لإثبات ان $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ ليست منطقة تكاملية يكفي أن ندعمها بالمثال الذي ورد في أول المحاضرة لإثبات ذلك)
٤- الحلقة $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ ليست منطقة تكاملية لأنه لو أخذنا $2.2 = 0$ (نكتفي بمثال واحد من الحلقة $\mathbb{Z}_4$ لنثبت بأنها ليست منطقة تكاملية)

مبرهنة : دون برهان.

ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً عندئذٍ الحلقة $\mathbb{Z}_n$ منطقة تكاملية $\Leftrightarrow$ n عدداً أولياً .

تعريف الحقل : هو حلقة مغايرة للصفر تبديلية وواحدية وكل عنصر فيها مغاير للصفر يملك مقلوب (أي قابل للقلب) عندئذٍ نسمي الثلاثية $(F,+,.)$ حقلا إذاً تحقق ما يلي :

١- الثنائية $(F,+)$زمرة تبديلية .
٢- الثنائية $(F^*,.)$ زمرة تبديلية .
٣- الضرب توزيعي على الجمع :

$$\forall\, a,b,c \in F : a.(b+c) = ab + ac$$

مبرهنة : ليكن F حقل عندئذٍ :

١- الحقل F لا يحوي قواسم للصفر .
٢- الحقل F منطقة تكاملية .

البرهان :

١- ليكن $a,b \in F$ بحيث $a.b = 0$ وبفرض أن $a \neq 0$ عندئذٍ بما أن F حقل فإن a له مقلوب وليكن a^{-1}

$$\Leftarrow a^{-1}.a = a.a^{-1}$$

$$a.b = 0 \Rightarrow a^{-1}(a.b) = a^{-1}.0 \Rightarrow (a^{-1}.a)b = 0 \Rightarrow 1.b = 0$$

$\Leftarrow$ أي أن F لا يحوي قواسم للصفر .

٢- بما أن F حقل فهو حلقة تبديلية وواحدية وحسب الطلب (١) لا يحوي قواسم للصفر أي يشكل منطقة تكاملية .

ملاحظة : كل منطقة تكاملية ليست بالضرورة حقل .

الحقل الجزئي : ليكن F حقل وَ K مجموعة جزئية غير خالية من F عندئذٍ نقول عن المجموعة K بأنها تشكل حقل جزئي في F إذا كانت K تشكل حقل بحد ذاتها .

مبرهنة : ليكن F حقل وليكن K مجموعة جزئية غير خالية من F تحوي عنصرين على الأقل عندئذٍ الشرط اللازم والكافي لكي تكون K حقل جزئي من F هو تحقق الشرطين التاليين :

١- $\forall a,b \in K \Leftarrow a-b \in K$
٢- $\forall c,d \in K \Leftarrow c.d^{-1} \in K$

البرهان : (غير مطلوب ☻)

مثال : بفرض لدينا المجموعة $Q[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in Q\}$

هل المجموعة $Q[\sqrt{2}]$ هي حقل جزئي من حقل الأعداد الحقيقة R ؟

الحل : اعتماداً على المبرهنة السابقة لكي تكون المجموعة Q حقل جزئي هو يجب أن يتحقق ما يلي :

(الشرطين الموجودين بالمبرهنة وأن تكون المجموعة غير خالية) .

١- إن $\emptyset \neq Q(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}$

$$0 + 0\sqrt{2} = 0 \in Q\sqrt{2}$$

٢- $\forall x, y \in Q[\sqrt{2}] : x = a_1 + b_1\sqrt{2}\,, y = a_2 + b_2\sqrt{2}$

$$x - y = a_1 + b_1\sqrt{2} - (a_2 + b_2\sqrt{2})$$

$$= \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\in Q} + \underbrace{(b_1 - b_2)}_{\in Q}\sqrt{2} \in Q[\sqrt{2}]$$

٣- $x . y^{-1} = (a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2})^{-1}$

نضرب بالمرافق $= \dfrac{(a_1 + b_1\sqrt{2})}{(a_2 + b_2\sqrt{2})} \cdot \dfrac{(a_2 - b_2\sqrt{2})}{(a_2 - b_2\sqrt{2})}$

$$= \frac{a_1a_2 - 2b_1b_2 + (-a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}}{a_2^2 - 2b_2^2}$$

$$\frac{a_1a_2 - 2b_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2\sqrt{2}}{a_2^2 - 2b_2^2} \in Q\sqrt{2}$$

$\Leftarrow Q[\sqrt{2}]$ حقل جزئي

مثال : ليكن $\mathcal{R}$ **حلقة** أثبت أن المجموعة $\mathbb{Z}(\mathcal{R}) = \{x : x \in \mathcal{R}, ax = xa : \forall a \in \mathcal{R}\}$ تشكل **حلقة** جزئية من $\mathcal{R}$.

الحل : $\emptyset \neq \mathbb{Z}(\mathcal{R})$

ليكن $x, y \in \mathbb{Z}(\mathcal{R})$ عندئذٍ تتحقق العلاقة التالية :

$$ax = xa\,, ay = ya$$

١- $(x - y)a = xa - ya = ax - ay = a(x - y) \Longrightarrow x - y \in \mathbb{Z}(\mathcal{R})$

٢- $(xy)a = x(ya) = x(ay) = (xa)y = (ax)y = a(xy) \in \mathbb{Z}(\mathcal{R})$

$\Leftarrow \mathbb{Z}(\mathcal{R})$ **حلقة** جزئية .

انتهت المحاضرة

إعداد: لبنى الطون – محمد فهمي القاضي – أحمد ابو التوت