مقدمة: في المحاضرة السابقة أنهينا حديثنا عن المعايير التي يجب أن تتمتع فيها معادلة الفروق PDE وهي التماسك والاستقرار والتقارب وفي نهاية المحاضرة رسمنا مثلثاً يبين العلاقة بينهم وشرحناه مع رموزه أما اليوم فسنقوم بدراسة الاستقرار والتقارب للمعادلة الناقصية لابلاس وبواسون ببعد واحد وببعدين.

إن معادلة لابلاس هي معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية ومن النمط الناقصي وهي من الشكل: $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ عندما تكون معادلة لابلاس غير متجانسة (مع طرف ثاني) عندها ندعوها بمعادلة بواسون ولها الشكل $\nabla^2 u = f(x,y)$

ملاحظة هامة:

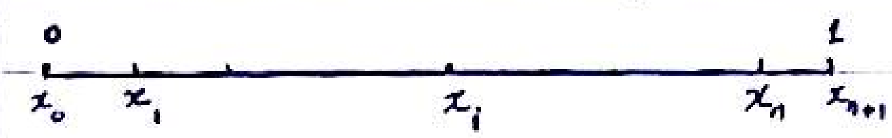
إن معادلة لابلاس هي معادلة تفاضلية جزئية مستقلة عن الزمن، أي لا علاقة لها بالزمن.

1- معادلة بواسون ببعد واحد:

تأخذ الشكل: $u_{xx} + f(x) = 0$ ---- (*)

$u(0) = u(1) = 0$, $f \in C[0,1]$

حيث $C[0,1]$ فضاء توابع الحقيقية المستمرة على المجال $[0,1]$.



حيث $h = \frac{1}{n+1}$ وإن

$x_i = ih$

و $U_i = U(x_i)$ من أجل $0 \le i \le n+1$

نطبق الفروق المركزية على المعادلة المعطاة:

$$\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} = -f(x_i) \quad ; 1 \le i \le n \quad \text{---- ①}$$

$U_{n+1} = U(1) = 0$ و $U_0 = U(0) = 0$

أخذنا في المعادلة (1) المجال $1 \le i \le n$ ولم نأخذ المجال $0 \le i \le n+1$ لأن حد أطراف المجال يطابق الحل الفعلي مع حل الفروق.

نضرب المعادلة (1) بالعدد (-1) فنجد:

$$\frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} = f(x_i) \quad A$$

إن المعادلة الأخيرة هي مجموعة معادلات خطية يمكن إيجادها بتعويض قيم أخذ النقاط حيث أن كل نقطة تقابل معادلة.

أي نعوض $i = 1, 2, \dots, n$

لنأخذ أولاً $i=1$

$$i=1: \quad -u_2 + 2u_1 - u_0 = h^2 f(x_1)$$

$$i=2: \quad -u_3 + 2u_2 - u_1 = h^2 f(x_2)$$

وهكذا...

فينتج عندنا الشكل المصفوفي التالي $AU = F$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} , \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

حيث $A \in R^{n \times n}$ مصفوفة مربعة ثلاثية الأقطار و $U, f \in R^n$.

تذكرة المصفوفة ثلاثية الأقطار:

$$B = \begin{bmatrix} \beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & \beta & \alpha & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

مثال:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

تعطى القيم الذاتية للمصفوفة A السابقة بالشكل:

(مثلا) $\lambda_p = \frac{2}{h^2}\left(\cos(p\pi h) - 1\right) \; ; \; p = 1, 2, \dots, m$

وهي تقابل الشعاع الذاتي U^p المعطى بالشكل $U_j^p = \sin(p\pi j h)$ حيث $j = 1, 2, \dots, m$

لنتحقق أن λ_p هي قيمة ذاتية للمصفوفة A:

يمكن تحقق من ذلك من خلال تحقق العلاقة التالية: $AU^p = \lambda_p U^p$

إن المركبة j للشعاع AU^p هي:

$$(AU^p)_j = \frac{1}{h^2}\left(U_{j+1}^p - 2U_j^p + U_{j-1}^p\right)$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(\sin(p\pi(j+1)h) - 2\sin(p\pi j h) + \sin(p\pi(j-1)h)\right)$$

لدينا $\cos(p\pi h) = \sin(p\pi h)$
$\cos(p\pi h) = \sin(-p\pi h)$
وأخرجنا $\sin(p\pi j h)$ كعامل مشترك

$$= \frac{1}{h^2}\sin(p\pi j h)\left[2\cos(p\pi h) - 2\right]$$

أخرجنا 2 عامل مشترك من قوس ثاني

$$= \frac{2}{h^2}\left(\cos(p\pi h) - 1\right)\sin(p\pi j h)$$

$$= \lambda_p u^p$$

Note : إذا كانت λ أصغر قيمة ذاتية للمصفوفة A فإن $\frac{1}{\lambda}$ هي أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة A^{-1}.

لدينا $\lambda_p = \frac{2}{h^2}\left(\cos(\overset{\theta}{\overline{p\pi h}}) - 1\right)$ قيمة ذاتية للمصفوفة A ولنستنتج القيمة الذاتية للمصفوفة A^{-1}.

نعلم أن منشور تايلور لتابع الجيب هو:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots$$

بالتعويض:

$$\Rightarrow \lambda_p = \frac{2}{h^2}\left(\cancel{1} - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots - \cancel{1}\right)$$

$$\lambda_p = \frac{-\theta^2}{h^2} + \frac{2\theta^4}{4!h^2} - \frac{2\theta^6}{6!h^2} + \dots$$

إن أصغر قيمة ذاتية هي:

$$\lambda_p = \frac{-\theta^2}{h^2} + o(h^4)$$

لدينا $\theta = p\pi h$ وهنا الحل $p=1$

بالتعويض $\Rightarrow \lambda_1 = -\pi^2 + o(h^2)$

وعليه تكون هذه القيمة أعظم قيمة ذاتية في المصفوفة A^{-1}

$$\Rightarrow \rho(A^{-1}) = \|A^{-1}\|_2 = \left|\frac{1}{\lambda_1}\right| = \frac{1}{\pi^2} < 1$$

أي أن الطريقة مستقرة ولأجل معادلة بواسون ذو بعد واحد متماسكة عندما $h \to 0$ عندها الطريقة متقاربة.

-2- معادلة بواسون ببعدين :

تكتب بالشكل : $u_{xx} + u_{yy} + f(x,y) = 0$ --- (**)

نطبق طريقة الفروق المركزية لكل من u_{xx} و u_{yy} عند نقطة (x_i, y_j) :

$$u_{xx} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + o(h^2)$$

$$u_{yy} = \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{k^2} + o(k^2)$$

وإذا عوضنا في المعادلة (**) فنجد أن خطأ الاقتطاع $o(h^2) + o(k^2)$ وهو يسعى لصفر

عندما $0 \leftarrow h,k$ وعليه فالطريقة متماسكة والآن لندرس الاستقرار ...

لنأخذ $h=k$ فنجد:

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{h^2}\left[u_{i+1}^{j}+u_{i-1}^{j}+u_{i}^{j+1}+u_{i}^{j-1}-4u_{i}^{j}\right]=-f_{ij}$$

بضرب الطرفين في المعادلة (2) بالعدد (-1) نجد

$$\frac{1}{h^2}\left[-u_{i+1}^{j}-u_{i-1}^{j}-u_{i}^{j+1}-u_{i}^{j-1}+4u_{i}^{j}\right]=f_{ij}$$

إن المعادلة الأخيرة هي مجموعة معادلات خطية يمكن إيجادها بتعويض قيم i و j عند النقاط الداخلية حيث أن كل نقطة تقابل معادلة.

أي نعوض $i=1,\ldots,m$ و $j=1,2,\ldots,m$

لنأخذ أولاً $j=1$

$$-u_{i+1}^{1}-u_{i-1}^{1}-u_{i}^{2}-u_{i}^{0}+4u_{i}^{1}=h^2 f_{i1}$$

$$i=1:\quad -u_{2}^{1}-u_{0}^{1}-u_{1}^{2}-u_{1}^{0}+4u_{1}^{1}=h^2 f_{11}$$

$$i=2:\quad -u_{3}^{1}-u_{1}^{1}-u_{2}^{2}-u_{2}^{0}+4u_{2}^{1}=h^2 f_{21}$$

$\vdots$

وهكذا نكمل

نوجد كل القيم لنقط الحدية وذلك بالتعويض في شروط (دريشليه) الحدي المرفق مع المعادلة ثم ننقلها إلى الطرف الثاني (طرف المعاليم) بمتابعة تعويض قيم i و j نحصل على $m\times m$ معادلة بـ $m\times m$ مجهول نكتبها بالشكل المصفوفي فنحصل على الجملة $AU=B$

حيث:

$$A=\begin{bmatrix} T & I & & & \\ I & T & I & & \\ & I & T & I & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & I & T \end{bmatrix}$$

حيث I هي مصفوفة واحدية من البعد $m\times m$ و T مصفوفة ثلاثية الأقطار

الشكل:

$$T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ 0 & -1 & 4 & -1 & \cdots \\ & & \cdots & & \\ & & & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

تعطى القيمة الذاتية للمصفوفة A بالشكل:

$$(1)^* \quad \lambda_{p,k} = \frac{2}{h^2}\left(\left(\cos(\overset{\theta_1}{\widehat{p\pi h}})-1\right)+\left(\cos(\overset{\theta_2}{\widehat{k\pi h}})-1\right)\right)$$

وهي تقابل الشعاع الذاتي:

$$u_{i,j}^{p,k} = \sin(p\pi i h)\sin(k\pi j h)$$

نعلم أن منشور تايلور لتابع التجيب هو:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$$

وباقتطاع هذا النشر عند أول حدين نجد ولدينا $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2!}$

$$\theta_1 = p\pi h \Rightarrow (\theta_1)^2 = p^2\pi^2h^2$$

$$p=1 \Rightarrow (\theta_1)^2 = \pi^2h^2$$

$$\theta_2 = k\pi h \Rightarrow (\theta_2)^2 = k^2\pi^2h^2$$

$$k=1 \Rightarrow (\theta_2)^2 = \pi^2h^2$$

لنعوض $p=k=1$ و $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2!}$ في $(1)^*$ فنجد أصغر قيمة ذاتية للمصفوفة A هي $\lambda_{1,1}$ وعليه:

$$\lambda_{1,1} = \frac{2}{h^2}\left(\left(1 - \frac{\pi^2h^2}{2} - 1\right) + \left(1 - \frac{\pi^2h^2}{2} - 1\right)\right)$$

$$= \frac{2}{h^2}\left(-2\,\frac{\pi^2h^2}{2}\right) = -2\pi^2$$

وعليه فإن أعظم قيمة ذاتية لـ A^{-1} هي: $\frac{1}{\lambda_{1,1}}$

$$\Rightarrow \rho(A^{-1}) = \|A^{-1}\|_2 = \left|\frac{1}{\lambda_{1,1}}\right| = \frac{1}{2\pi^2} < 1$$

وعليه الطريقة المتبعة مستقرة ولكونها متماسكة فهي طريقة متقاربة.

ملاحظات: 1. نصف القطر الطيفي لا يتعلق بالشروط الحدية أي مهما أضفنا شروط أو حذفنا فلن تتغير المصفوفة A في $AU=B$ ولكن يختلف في الحل أي إذا طلب منا حل المعادلة التفاضلية الجزئية فإن أي تغير بالشروط الحدية فإنه يتغير الحل كامل لأنه متعلق بالمصفوفة B في $AU=B$.

2. لتكن لدينا D مصفوفة متناظرة وثلاثية الأقطار ولديها القيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ فإن أصغر قيمة ذاتية في D ستكون أعظم قيمة ذاتية للمصفوفة D^{-1} أي تتحقق العلاقة:

$$\lambda_i = \frac{1}{\lambda_i^*} \quad ; \quad i=1,2,\ldots,n$$

وحيث λ_i القيم الذاتية لـ D و λ_i^* القيم الذاتية لـ D^{-1}

3. هذه المحاضرة كلها دراسة نظرية ومطلوبة في الامتحان وقد جاء في أحد الدورات السؤال الآتي:

أثبت استقرار معادلة بواسون ذو بعدين حيث القيمة الذاتية لها

$$\lambda_p = \text{———}$$

مع الملاحظة يمكن أن تعطى λ_p ويمكن لا فيجب حفظها.

--- انتهت المحاضرة ---