Mathematical Modeling

النمذجة الرياضية

المحاضرة: 3&2

الدكتورة: ميسم

Scanned by CamScanner

المحاضرة الثانية: 13/12/2017

تستخدم البرمجة الخطية في مجالات كثيرة نذكر منها:

1) نموذج توزيع الإنتاج (أحد نماذج العامة)

نفرض أن مصنع يمكنه إنتاج الأنواع A_j من المنتجات حيث $j = \overline{1,n}$ وذلك باستخدام المواد الأولية B_i حيث $i = \overline{1,m}$ إذا كانت الوحدة الواحدة من المنتج A_j تستهلك من المادة الأولية B_i الكمية a_{ij} و إذا كان الربح الصافي للمصنع من إنتاج الوحدة الواحدة من المنتج هو c_j و المطلوب: تنظيم إنتاج هذا المصنع بحيث يكون الربح أعظمي.

لحل مثل هذه المسائل نقوم أولاً بتحويل الشرط إلى علاقات رياضية باستخدام رموز معينة كما أنه يمكننا رسم جدول لتسهيل معرفة المطلوب ثم نقوم بكتابة النموذج.

الحل:

مواد أولية / منتجات	A_1	A_2	- - -	A_n	كميات متوفرة
B_1	a_{11}	a_{12}	——	a_{1n}	b_1
B_2	a_{21}	a_{22}	——	a_{2n}	b_2
!					!
!					!
B_m	a_{m1}	a_{m2}	——	a_{mn}	b_m
الربح	c_1	c_2	- - -	c_n	

نفرض x_j الكمية المنتجة من المنتجات من A_j حيث $j = \overline{1,n}$ عندئذ يكون تابع الهدف هو:

$$Z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

شروط الحل: 1- شرط المواد الأولية

شرط المادة B_1:

SABBAGH STATIONERY

Scanned by CamScanner

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1$

شرط المادة B_2

$a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2$

⋮

شرط المادة B_m

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m$

ج) شروط عدم السلبية:

$x_j \ge 0$; $j = \overline{1,n}$

النموذج الرياضي:

نوجد النتيجة العظمى لتابع:

$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

ضمن الشروط:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2$

⋮

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m$

$x_j \ge 0$; $j = \overline{1,n}$

مثال:

ينتج مصنع نوعين من العناصر A_1 و A_2 حيث يدخل في إنتاج هذه العناصر ثلاث مواد أولية B_1، B_2، B_3 والكميات المتوفرة من هذه المواد محدودة حيث لدينا 30 من B_1 و20 من B_2 و25 من B_3، من أجل إنتاج عنصر A_1 يلزمنا 4 من B_1 و4 من B_2 أما من أجل إنتاج عنصر من A_2 يلزمنا 8 من B_1 و3 من B_2 و5 من B_3 والمطلوب: وضع خطة إنتاجية مثلى لتحديد عدد العناصر المنتجة من A_1 و A_2 بحيث يحقق المصنع أكبر ربح ممكن علما بأن:

العنصر A_1 يؤدي إلى ربح 30 وحدة نقدية

والعنصر A_2 يؤدي إلى ربح 40 وحدة نقدية

الحل:

المواد الأولية \ الناتج	A_1	A_2	الكميات متوفرة
B_1	4	8	30
B_2	4	3	20
B_3	0	5	25
الربح	30	40	

نفرض x_1 الكمية المنتجة من العنصر A_1

و x_2 ~ ~ ~ ~ A_2

عندئذ تابع الربح:

$Z = 30x_1 + 40x_2$

شرط المادة B_1 : $4x_1 + 8x_2 \le 30$

شرط المادة B_2 : $4x_1 + 3x_2 \le 20$

شرط المادة B_3 : $0x_1 + 5x_2 \le 25$

شروط عدم السلبية: $x_1, x_2 \ge 0$

وبالتالي النموذج الرياضي

$\max Z = 30x_1 + 40x_2$

$4x_1 + 8x_2 \le 30$

$4x_1 + 3x_2 \le 20$

$0x_1 + 5x_2 \le 25$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

Scanned by CamScanner

مثال 88: لكي يتم إنتاج 3 منتجات مختلفة A_1, A_2, A_3 في شركة ما يجب أن تمر عبر ثلاث أقسام إنتاجية وإذا علمت أن زمن الإنتاج الوحدة الواحدة من المنتجات المختلفة بالساعات في كل من الأقسام الثلاثة وكذلك الوقت الكلي المتاح لكل قسم معين حسب الجدول المرفق، والمطلوب إيجاد الخطة الإنتاجية لكل قسم بحيث يتحقق أكبر ربح ممكن علماً بأن الربح العائد من الإنتاج كل وحدة من A_1, A_2, A_3 هو 10، 20، 12 وحدة نقدية على الترتيب.

الجدول المرفق:

القسم الإنتاجي	الزمن اللازم لوحدة إنتاج القسم			الوقت الكلي
	A_1	A_2	A_3	
القسم الأول	2	1	3	120
القسم الثاني	1	2	0	60
القسم الثالث	2	0	1	40
الربح	10	20	12	

الحل 88: نفرض x_1 الكمية المنتجة من A_1

x_2 الكمية المنتجة من A_2

x_3 الكمية المنتجة من A_3

عندئذ تابع الهدف

$$Z = 10x_1 + 20x_2 + 12x_3$$

شرط القسم الأول $2x_1 + 1x_2 + 3x_3$

" " الثاني $1x_1 + 2x_2 + 0x_3$

" " الثالث $2x_1 + 0x_2 + 1x_3$

شروط عدم السلبية $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

عندئذ النموذج الرياضي: أوجد القيمة العظمى لتابع Z

$$Z = 10x_1 + 20x_2 + 12x_3 \longrightarrow \max$$

ضمن الشروط:

$$2x_1 + 1x_2 + 3x_3 \leq 120$$

$$1x_1 + 2x_2 + 0x_3 \leq 60$$

$$2x_1 + 0x_2 + 1x_3 \leq 40$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

المحاضرة الثالثة: 12/3/2016

2) نموذج الاستغلال الأمثل للأراضي الزراعية:

لنفرض أنه لدينا n منطقة زراعية مساحة كل منها $a_1, a_2, \ldots, a_n$ نريد زراعتها بـ m نوع من المحاصيل الزراعية لتأمين متطلبات المجتمع فإذا كان يلزمنا من المحصول i المقدار b_i وإذا كان متوسط إنتاج واحدة المساحة في المنطقة j من المحصول i هو a_{ij} طن في الهكتار، وكان الربح الحاصل من كل واحدة من المحصول i هي c_i، والمطلوب تحديد مقدار المساحة اللازمة زراعتها بكل من المحاصيل وفي جميع المناطق لتحقيق أكبر ربح ممكن مع تلبية حاجة المجتمع من كل محصول.

المحاصيل \ المناطق	1	2	----	n	الكمية المتوفرة	الربح الحل 88
1	a_{11}	a_{12}	--	a_{1n}	b_1	c_1
2	a_{21}	a_{22}	--	a_{2n}	b_2	c_2
⋮	⋮	⋮	---	⋮	⋮	⋮
m	a_{m1}	a_m	---	a_{mn}	b_m	c_m
المساحة المتوفرة	a_1	a_2	---	a_n		

Scanned by CamScanner

مثال وظيفية: نريد استثمار 4 مناطق زراعية هي الساحل والغاب وحلب وحوران مساحة كل منها 10 - 15 - 100 - 50 وذلك لزراعتها بالمحاصيل التالية: قمح شعير قطن تبغ. حيث نفرض أن إنتاجية المناطق من تلك المحاصيل وأسعارها معطاة بالجدول:

المحاصيل / المناطق	الساحل	الغاب	حوران	حلب	الطلب	البيع
قمح	5	4	6	6	2000	1500
شعير	6	5	4	6	1500	1000
قطن	4	10	8	5	500	5000
تبغ	7	2	0	0	100	4500
حشائش	3	12	10	4	700	500
المساحة	10	15	100	50		

والمطلوب صياغة نموذج رياضي لهذه المسألة بحيث تكون قيمة الإنتاج أكبر ما يمكن

x_{ij} المساحة المزروعة من المحصول i في المنطقة j أي أن الكمية المنتجة من المحصول i في المنطقة j هي $a_{ij}x_{ij}$ وعليه يكون تابع الربح

$$Z = c_1 \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_{1j} + c_2 \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_{2j} + \cdots + c_m \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_{mj}$$

شروط المحاصيل:

$$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \cdots + a_{1n}x_{1n} \geq b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \cdots + a_{mn}x_{mn} \geq b_1$$

شروط المناطق:

$$x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} = a_1$$
$$x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m2} = a_2$$
$$\vdots$$
$$x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} = a_n$$

شروط عدم السلبية:

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = \overline{1,m} \quad j = \overline{1,n}$$

عندئذ النموذج الرياضي: أوجد القيمة العظمى لتابع الربح

$$\max Z = c_1 \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_{1j} + \cdots + c_m \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_{mj}$$

ضمن الشروط:

$$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \cdots + a_{1n}x_{1n} \geq b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \cdots + a_{mn}x_{mn} \geq b_1$$
$$x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} \leq a_1$$
$$\vdots$$
$$x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} = a_n$$
$$x_{ij} \geq 0 \quad i = \overline{1,m} \quad j = \overline{1,n}$$

x_{11} المساحة المزروعة من القمح في الساحل
x_{12} " " " " الغاب
x_{13} " " " " حوران
x_{14} " " " " حلب
x_{21} " " الشعير " الساحل
x_{22} " " " " الغاب
x_{23} " " " " حوران
x_{24} " " " " حلب
x_{31} " " القطن " الساحل
x_{32} " " " " الغاب
x_{33} " " " " حوران
x_{34} " " " " حلب

Scanned by CamScanner

الباحة المزروعة من البقوليات في الساحل + x_{41}

" " " " الغاب + x_{42}

" " " " صوران + x_{43}

" " " " حلب + x_{44}

الشتول " " الساحل + x_{51}

" " " " الغاب + x_{52}

" " " " صوران + x_{53}

" " " " حلب + x_{54}

وعليه يكون تابع الهدف:

$$Z = 1500(5x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 6x_{14}) + 1000(6x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} + 6x_{24}) + 5000(4x_{31} + 10x_{32} + 8x_{33} + 5x_{34}) + 4500(7x_{41} + 2x_{42} + 0x_{43} + 0x_{44}) + 500(3x_{51} + 12x_{52} + 10x_{53} + 4x_{54})$$

شرط الأراضي:

$$5x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 6x_{14} \geq 2000$$

شرط العمال:

$$6x_{21} + 5x_{22} + 6x_{23} + 6x_{24} \geq 1500$$

شرط القطن:

$$4x_{31} + 10x_{32} + 8x_{33} + 5x_{34} \geq 5000$$

شرط البقع:

$$7x_{41} + 2x_{42} + 0x_{43} + 0x_{44} \geq 100$$

شرط الأسمدة:

$$3x_{51} + 12x_{52} + 10x_{53} + 4x_{54} \geq 700$$

شروط الباحات:

مساحة حلب: $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 10$

مساحة الغاب: $x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 15$

مساحة صوران: $x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 100$

مساحة حلب: $x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 50$

شروط عدم السلبية:

$$x_{ij} \geq 0 \quad ; \quad i = \overline{1,5} \quad ; \quad j = \overline{1,4}$$

عندئذ النموذج الرياضي، أوجد القيمة العظمى لتابع الربح

$$\max Z = 1500(5x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 6x_{14}) + 1000(6x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} + 6x_{24}) + 5000(4x_{31} + 10x_{32} + 8x_{33} + 5x_{34}) + 4500(7x_{41} + 2x_{42} + 0x_{43} + 0x_{44}) + 500(3x_{51} + 12x_{52} + 10x_{53} + 4x_{54})$$

ضمن الشروط:

$$5x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 6x_{14} \geq 2000$$

$$6x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} + x_{24} \geq 1500$$

$$4x_{31} + 10x_{32} + 8x_{33} + 5x_{34} \geq 5000$$

$$7x_{41} + 2x_{42} + 0x_{43} + 0x_{44} \geq 100$$

$$3x_{51} + 12x_{52} + 10x_{53} + 4x_{54} \geq 700$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 10$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 15$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 100$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 50$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad ; \quad i = 1,5 \quad ; \quad j = 1,4$$

Scanned by CamScanner

3) تركيب الخلائط: يعالج هذا الموضوع على أساس أن هذه المسألة هي مسألة تركيب أي خليطة معينة أو غذائية.

مثال: لنفرض أننا نريد تركيب خليطة من n مادة مغذية وكل مادة تحوي على m عنصر من واحدة المادة ن تحوي a_{ij} من العنصر i وسعر الوحدة الواحدة من المادة ن يساوي c_j ونريد الأقل (أو الأكثر) كمية العنصر i في الخليطة عن مقدار معين b_i وتكون كلفة الخليطة أصغر ما يمكن، والمطلوب صياغة النموذج الرياضي الذي يحقق طلبات المسألة.

الحل: بتنظيم المعلومات السابقة بجدول:

مقدار مطلوب	A_n	...	A_2	A_1	
b_1	a_{1n}	...	a_{12}	a_{11}	B_1
b_2	a_{2n}	...	a_{22}	a_{21}	B_2
⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
b_m	a_{mn}	...	a_{m2}	a_{m1}	B_m
	c_n	...	c_2	c_1	الثمن

المطلوب من المسألة: أن تكون كلفة الخليطة أصغر ما يمكن وأكثر كمية العنصر i في الخليطة عن المقدار b_i وعليه نفرض أن x_j هي الكمية المستخدمة من المادة A_j حيث $j = \overline{1,n}$ عندئذ يكون تابع الهدف

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

شروط القيود:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

شروط عدم السلبية: $x_j \geq 0$

عندئذ: النموذج الرياضي: أوجد القيم الدنيا لتابع الهدف: $\min L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_m$

ضمن الشروط:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$
$$x_j \geq 0 \quad ; \quad j = \overline{1,n}$$

مثال وظيفة:

تركيب وجبات غذائية: لنفرض أننا نريد تركيب وجبة غذائية من أربعة أنواع من المواد A_1, A_2, A_3, A_4 ولنفرض أنه يشترط أن تتضمن الوجبة مقدار معين من كل من العناصر الغذائية الهامة (بروتينات، كربونات، دهنيات) على أن لا تقل كمية البروتين في هذه الوجبة عن b_1 وأن لا تقل كمية الكربونات عن b_2 وأن لا تقل كمية الدهنيات عن b_3 وإذا كان سعر الوحدة الواحدة من كل مادة من المواد الأربعة هي c_1, c_2, c_3, c_4 و المطلوب إيجاد المقادير اللازمة من كل من A_1, A_2, A_3, A_4 التي تجعل أرخص ما يمكن تكون الكلفة أقل ما يمكن وذلك إذا علمت أن وحدة A_1 تحوي a_{11} بروتين، a_{21} كربون، a_{31} دهنيات، وحدة A_2 تحوي a_{12} بروتين، a_{22} كربون، a_{32} دهنيات، وحدة A_3 تحوي a_{13} بروتين، a_{23} كربون، a_{33} دهنيات، وحدة A_4 تحوي a_{14} بروتين، a_{24} كربون، a_{34} دهنيات.

الحل: بتنظيم المعلومات السابقة على شكل

فيصبح:

Scanned by CamScanner

المواد الغذائية / العناصر الغذائية	A_1	A_2	A_3	A_4	المقدار المطلوب
بروتينات	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1
كربونات	a_{11}	a_{12}	a_{23}	a_{24}	b_2
دهنيات	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	b_3
الربح	c_1	c_2	c_3	c_4	

نفرض x_1: الكمية المستخدمة من المادة A_1

A_2 ... x_2

A_3 ... x_3

A_4 ... x_4

سنكون تابع الهدف:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$

شروط العناصر:

شرط البروتينات: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \geq b_1$

شرط الكربونات: $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \geq b_2$

شرط الدهنيات: $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \geq b_3$

شروط عدم السلبية $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

عندئذ: الصوغ الرياضي: أوجد القيمة الدنيا للتابع الهدف $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \to \min$

ضمن الشروط:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \geq b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \geq b_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0$$

Scanned by CamScanner