مقدمة: في المحاضرة السابقة تعرفنا على مبدأ طريقة الفروق المنتهية وهو استبدال المشتق بتابع عن قيم كما تعرفنا على أشكال الفروق المنتهية (التقدمية، التراجعية، المركزية للمشتق من المرتبة الأولى والمركزية للمشتق من المرتبة الثانية) وبعدها تحدثنا عن الشروط الحدية وأنواعها الثلاثة ومن ثم قمنا بحل تمرينين كل تمرين يحل بفكرة معينة الأول إيجاد الشكل المصفوفي للمعادلة التفاضلية الجزئية والثانية إيجاد حل للمعادلة التفاضلية الجزئية، أما في محاضرة اليوم سنتكلم عن أول مفهوم لتقارب طريقة الفروق المنتهية ألا وهو التماسك ثم وفي نهاية المحاضرة سنعرض حل تمارين الوظائف الموجودين في المحاضرة السابقة:

المفاهيم الأساسية لتقارب طريقة الفروق المنتهية:

لقد قام الرياضيون باختيار طرائق معينة من الطرائق (التقدمية، التراجعية، المركزية) واستبدالها بالمشتقات الموجودة في المعادلات التفاضلية الجزئية وبهذه العملية نجد ما يسمى بمعادلة الفروق، وهي معادلة بسيطة بدلالة قيم التابع وليس بدلالة مشتقات ولكن ليست كل الاستبدالات أو الخوارزميات صحيحة ولابد من تقييم الخوارزمية إن كانت صحيحة ومقبولة أم لا، ويتم هذا عبر معايير ثلاثة يجب أن تتمتع بها تقريبات الفروق المنتهية لمعادلة تفاضلية جزئية وهي: التماسك، الاستقرار، التقارب

التماسك:

يعني أن معادلة الفروق المنتهية هي تقريب جيد للمعادلة التفاضلية الجزئية.

التقارب:

يعني حل معادلة الفروق يقترب من حل المعادلة التفاضلية الجزئية.

الاستقرار:

يعني أن حل معادلة الفروق لا يتأثر كثيراً بالتغيرات الصغيرة التي تطرأ على النقاط التي تطبق عليها طريقة الفروق المنتهية.

❊ خطأ الاقتطاع الموضعي: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية $P(u)=0$ وتقريبات الفروق المنتهية لها هي $P_\Delta U_i^n = 0$ يعطى عندئذ خطأ الاقتطاع الموضعي بالعلاقة:

$$\tau_i^n = P(u) - P_\Delta U_i^n$$

❊ الخطأ الموضعي: هو $u_i^{n+1} - U_i^{n+1}$ أي الفرق بين حلول المعادلة التفاضلية الجزئية وحلول تقريبات الفروق المنتهية.

التماسك: وهو من الخصائص الهامة لتقريبات الفروق المنتهية ولكن هذه الخاصة غير كافية وحدها لقبول الخوارزمية أو رفضها.

❊ تعريف: نقول عن طريقة الفروق المنتهية $P_\Delta U_i^n = 0$ إنها متماسكة مع المعادلة التفاضلية الجزئية $P(u)=0$ إذا تحقق ما يلي:

$$\boxed{P(u) - P_\Delta U_i^n \xrightarrow[h,k \to 0]{} 0}$$

وهذا التعريف يكافئ أن يكون خطأ الاقتطاع عند كل النقاط يسعى إلى الصفر عندما $h,k \to 0$

❊ تعريف: ويعطى تعريف آخر للتماسك باستخدام الخطأ الموضعي كما يلي: تكون طريقة الفروق متماسكة إذا كان الخطأ الموضعي يسعى للصفر عندما $h \to 0$، $k \to 0$.

∴ يمكن استخدام أي من التعريفين السابقين المتكافئين لإثبات تماسك طريقة ما حسب المعطيات.

Note ❊: إذا كانت الجملة متماسكة عندئذ يتحقق ما يلي:

$$P(u) - P_\Delta U_i^n = O(h^q) + O(k^p)$$

حيث $p,q \in \mathbb{N}^*$. ونقول عندئذ إن دقة الطريقة (رتبة الخطأ) من المرتبة (p,q).

تذكرة: منشور تايلور لدالة في جوار نقطة يعطى بالعلاقة:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\dots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+o(h^{n+1})$$

** ولنعمم ذلك لنشمل دالة بمتغيرين وذلك عند تغير أحد هذين المتغيرين:

$$u(\underbrace{x_i+h}_{x_{i+1}},t_j)=u(x_i,t_j)+hu_x(x_i,t_j)+\frac{h^2}{2!}u_{xx}(x_i,t_j)+\dots+o(h^{n+1})$$

$$u(x_i,\underbrace{t_j+k}_{t_{j+1}})=u(x_i,t_j)+ku_t(x_i,t_j)+\frac{k^2}{2!}u_{tt}(x_i,t_j)+\dots+o(k^{n+1})$$

المثال التالي يوضح معنى خطأ الاقتطاع وكيف أن مرتبته تعتمد على المرتبة التي اقتطعنا بها سلسلة تايلور عندها.

مثال:

لتكن $f(u)=u_x+a\,u_t$ حيث a ثابت ولنفرض أننا سنأخذ معادلة الفرق التقدمي لكل من u_t و u_x عند نقطة (x_i,t_j) من الشبكة. برهن أن الطريقة متماسكة.

الحل:

إن معادلة الفروق هي: $\tilde f(u)=\frac{u_{i+1}^j-u_i^j}{h}+a\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{k}$

حسب منشور تايلور حول نقاط الشبكة $(x_i+h,\ t_j+k)$ يكون لدينا:

(*) $u_{i+1}^j=u_i^j+hu_x+\frac{h^2}{2!}u_{xx}+o(h^3)$

(**) $u_i^{j+1}=u_i^j+ku_t+\frac{k^2}{2!}u_{tt}+o(k^3)$

بإصلاح المعادلات * و ** يصبح لدينا "ننقل u_i^j للطرف الثاني ونقسم على k, h":

$$\begin{cases}\dfrac{u_{i+1}^j-u_i^j}{h}=u_x+\dfrac{h}{2}u_{xx}+o(h^2)\\[2ex]\dfrac{u_i^{j+1}-u_i^j}{k}=u_t+\dfrac{k}{2}u_{tt}+o(k^2)\end{cases}$$

بتعويض المعادلتين السابقتين في $\tilde f(u)$ نحصل على:

$$\tilde f(u)=u_x+\frac{h}{2}u_{xx}+o(h^2)+au_t+\frac{ak}{2}u_{tt}+a\,o(k^2)$$

ومنه بطرح $\tilde f(u)$ من $f(u)$ يكون:

$$\underbrace{f(u)}_{\text{معادلة تفاضلية الأصلية}}-\underbrace{\tilde f(u)}_{\text{معادلة الفروق}}=-\frac{h}{2}u_{xx}-\frac{ak}{2}u_{tt}+o(h^2)+o(k^2)\xrightarrow[k,h\to 0]{}0$$

وبالتالي الطريقة متماسكة حسب تعريف التماسك.

تمرين : (دورة الفصل الثاني 2013 – 2014) لـ 6 علامات ^^

لتكن لدينا $U_t = U_{xx}$; $0 \le x \le 1$ $\overset{\text{تكافئ}}{\Longleftrightarrow}$ $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

حيث : $\begin{cases} u(1,x) = \sin(\pi x) \\ u(0,x) = u(t,0) = 0 \end{cases}$ ← شروط حدية.

ويفرض أن صيغة خطأ الاقتطاع الموضعي هي :

$$\tau_{i,j} = \frac{k^2}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_{i,j} - \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i,j} + (2\theta - 1)\frac{2k}{h^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}$$

$$+ \frac{k^2}{h^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{i,j} + O\left(\frac{k^3}{h^2}, h^4, k^4\right)$$

نناقش التقارب لكل من k و h و θ.

الحل ^^

إن الحد الأول والثاني من عبارة خطأ الاقتطاع $\tau_{i,j}$ ينعدمان عندما $h, k \to 0$

أما الحد الثالث والرابع فلا يمكن الجزم بانعدامهما لذلك نميز حالتين :

1) $k = \lambda h$ عندما $h \to 0$ نناقش حالات θ كالتالي :

* $\theta = \frac{1}{2}$ بالتعويض بالحد الثالث نلاحظ أنه سينعدم

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \tau_{i,j} = \lim_{h \to 0}\left[\frac{\lambda^2 h^2}{h^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = \text{عدد} \ne 0$$

Note ^^
المشتقات توابع مستمرة
على مجال مغلق
تكون محدودة أي
تساوي عدد ما ^^

* $\theta \ne \frac{1}{2}$

$$\lim_{h\to 0} \tau_{i,j} = \lim_{h\to 0}\left[\underbrace{(2\theta - 1)\frac{2\lambda h}{h^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}_{\to \infty} + \underbrace{\frac{\lambda^2 h^2}{h^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)}_{\to \text{عدد}}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \tau_{i,j} \to \infty$$

وبالتالي الطريقة غير متقاربة عندما $k = \lambda h$ أياً كانت قيمة θ

2) $k = \lambda h^2$ عندما $h \to 0$ نناقش حالتي θ كالتالي :

* $\theta = \frac{1}{2}$ الحد الثالث معدوم وعليه : $\lim_{h\to 0} \tau_{i,j} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\lambda^2 h^4}{h^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\right] = 0$

ومنه الطريقة في هذه الحالة متقاربة.

* $\theta \ne \frac{1}{2}$ عندئذ : $\lim_{h\to 0} \tau_{i,j} = \lim_{h\to 0}\left[\overbrace{(2\theta - 1)\frac{2\lambda h^2}{h^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}^{0 \ne \text{عدد}} + \overbrace{\frac{\lambda^2 h^4}{h^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)}^{0}\right] \ne 0$

وبالتالي الطريقة غير متماسكة في هذه الحالة

مقدمة: في المحاضرة السابقة تحدثنا عن المعايير الثلاثة التي يجب أن تتمتع بها تقريبات الفروق المنتهية لمعادلة تفاضلية جزئية وهي التماسك والاستقرار والتقارب وبعدها استوفينا الشرح عن المعيار الأول وهو التماسك أما اليوم فسنتكلم عن المعيارين الثاني والثالث.

ثانياً: الاستقرار Stability

إذا عرفنا الخطأ بأنه الفرق بين الحلول التقريبية والحل الفعلي فإن الاستقرار هو أن الخطأ في إحدى مراحل الحسابات لا يؤدي إلى نمو الخطأ بالتقريب المتكرر.

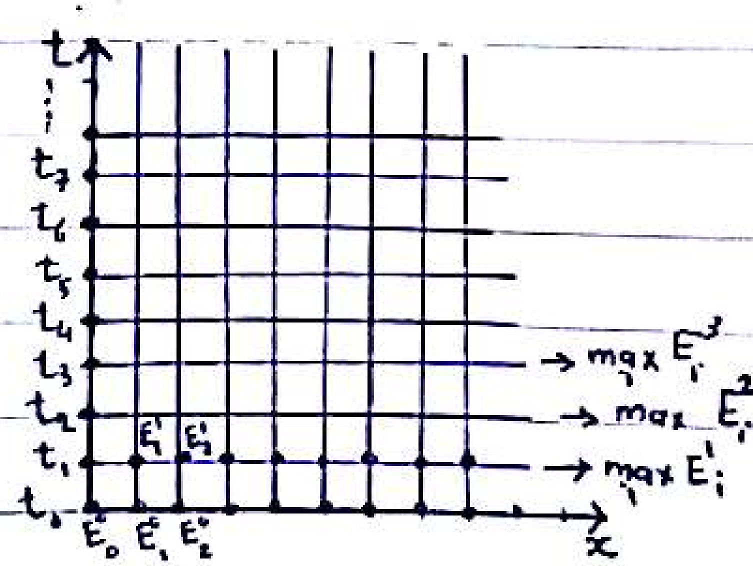
Note: نقصد هنا بالخطأ هو خطأ تدوير الأعداد وأخطاء الاقتطاع، أما مراحل الحسابات فهنا نقصد بها لحظة زمنية ما، ممكن حساب الأخطاء عند جميع النقاط في اللحظة t_1 ونأخذ الخطأ الأعظمي بينها وليكن E_1، ثم نأخذ الخطأ الأعظمي في اللحظة t_2 وليكن E_2 وهكذا ... وهنا يجب أن يتحقق ما يلي:

$$E_1 > E_2 > E_3 > \dots$$

أي: $\forall j: \ E_{j+1} < E_j$

عندها يمكننا القول عن الطريقة إنها مستقرة.

سنوضح ذلك بالرسم:



** ويمكن اختصار فكرة الاستقرار بالعبارة التالية: (تغيّرات صغيرة لا تؤدي إلى تغيّرات كبيرة)

** تعريف آخر للاستقرار:

تكون طريقة الفروق المنتهية المطبقة على مسألة قيم البداية $U_{j+1} = L_\Delta U_j$ **مستقرة** إذا وجد ثابت موجب c مستقل عن أبعاد الشبكة (h, K) وعن القيم الابتدائية (التي يطابق فيها الحل الفعلي مع الحل التقريبي) بحيث تحقق:

$$\boxed{\|U_j\| \leq c\,\|U_0\|,\quad jK<T \quad , K\to 0, h\to 0 \quad j\to\infty}$$

ويعني أن الحل يبقى محدوداً خلال فترات زمنية منتهية عندما يكون الحل الابتدائي محدود خلال فترات زمنية منتهية.

** تذكرة:

نصف القطر الطيفي لمصفوفة مربعة: $\rho(A) = \max|\lambda|$

حيث λ هي القيم الذاتية للمصفوفة A وهي عبارة عن حلول المعادلة المميزة $\det(A-\lambda I)=0$ ، I مصفوفة واحدية

نظيم مصفوفة مربعة: هناك ثلاث دوال نظيم للمصفوفة:

نظيم الأسطر $\|A\|_\infty = \max \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

نظيم الأعمدة $\|A\|_1 = \max \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

النظيم الثاني $\|A\|_2 = \max\sqrt{|\lambda_j(A^TA)|} = \rho(A) = \max|\lambda|$

* إنّ برهان الاستقرار عن طريق التعريف مباشرةً أمر في غاية الصعوبة، لذا عوضاً عن ذلك من الأسهل استخدام أدوات أخرى لإثبات الاستقرار وهي إما باستخدام طريقة المصفوفات أو باستخدام طريقة تحليل فون نيومان للاستقرار وسنتحدث بالتفصيل عن تلك الطريقتين.

1- طريقة المصفوفات: بعد إيجاد الشكل المصفوفي للمعادلة التفاضلية الجزئية

$AU = B$ نقوم بتبديل U بـ E فنحصل على $AE = B$ ندرس القيم الذاتية للمصفوفة A^{-1} لأن:

$$AE = B$$

بضرب A^{-1} من اليسار

$$\Rightarrow E = A^{-1}B$$

فإذا تحقق أن: $\|A^{-1}\|_2 < 1$ أي $\rho(A^{-1}) < 1$ فإن الطريقة تكون مستقرة.

∴ نستخدم هذه الطريقة عادةً لدراسة استقرار طريقة الفروق للمعادلة الناقصية

2- تحليل فون نيومان للاستقرار (تحليل الاستقرار باستخدام متسلسلة فوريه المتقطعة):

تعتمد هذه الطريقة على افتراض أن الحل من شكل:

$$V_j = G_j e^{i\theta}$$

أو بشكل آخر (مشابه) بافتراض أن الخطأ من شكل:

$$E_j = G_j e^{i\theta}$$

حيث e العدد النيري و i العدد التخيلي العقدي، وليس دليلاً.

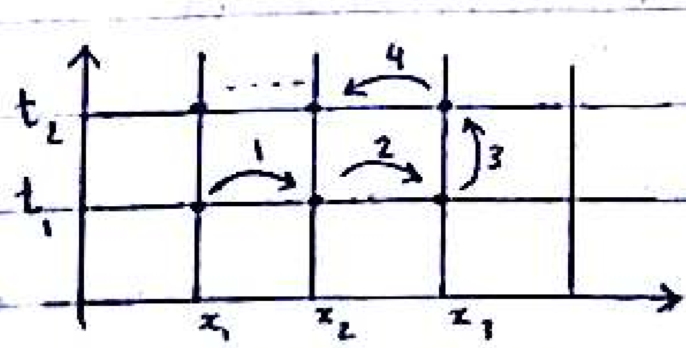
ثم نثبت $|G_j| < 1$ فيكون عندئذ الطريقة مستقرة.

∴ نستخدم هذه الطريقة عادةً لدراسة استقرار طريقة الفروق للمعادلة المكافئية والزائدية

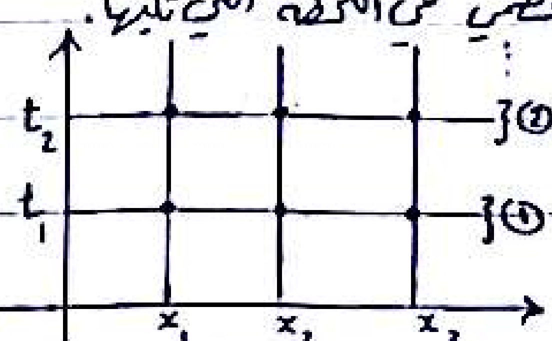
Note: إذا كانت قيمة واحدة j غير محقق الشرط $|G_j| < 1$ عندها تكون الطريقة غير مستقرة!!

مقارنة بين التماسك والاستقرار بيانياً:

نلاحظ أننا عند دراسة التماسك درسنا خطأ الاقتطاع عند كل نقطة من نقاط الشبكة الداخلية، أما عند دراسة الاستقرار فنأخذ الخطأ الأعظمي في لحظة ما ونقارنه بالخطأ الأعظمي في اللحظة التي تليها.



دراسة التماسك، 1، 2، 3، 4، ....



دراسة الاستقرار ①، ②، ....

Note: نلاحظ أننا استبدلنا $AU = B$ بـ $AE = B$ واستبدلنا $U_j = G_j e^{i\theta}$ بـ $E_j = G_j e^{i\theta}$ أمكننا ذلك لأن: $E = U - u$

حيث U حل تقريبي و u حل أصلي وإذا عوضنا بالشكل المصفوفي فإن u (الحل الأصلي) سيساوي الصفر وذلك لأنه حل فعلي للمعادلة تفاضلية لذلك فوراً يمكننا كتابة $(\hat{A}\hat{E} = \hat{B})$ بدلاً من $(\hat{A}\hat{U} = \hat{B})$.

التقارب Convergence

نقصد بالتقارب أن الحل التقريبي الناتج عن حل معادلة الفروق المنتهية يقترب نحو الحل الفعلي لمعادلة تفاضلية جزئية وذلك عندما $h, k \to 0$

أي إذا كان الحل الفعلي هو $u(x, t)$ وكان الحل التقريبي عند النقطة (x_i, t_j) هو u_i^j فإننا نقبل بالحل التقريبي ونقول عن الطريقة إنها متقاربة.

بشكل آخر: نقول عن الطريقة إنها متقاربة إذا تحقق:

$$\| u_j - U_j \| \xrightarrow[h,k \to 0]{} 0$$

وذلك $\forall x_i = ih \;,\; \forall t_j = jk$

نظرية هامة:

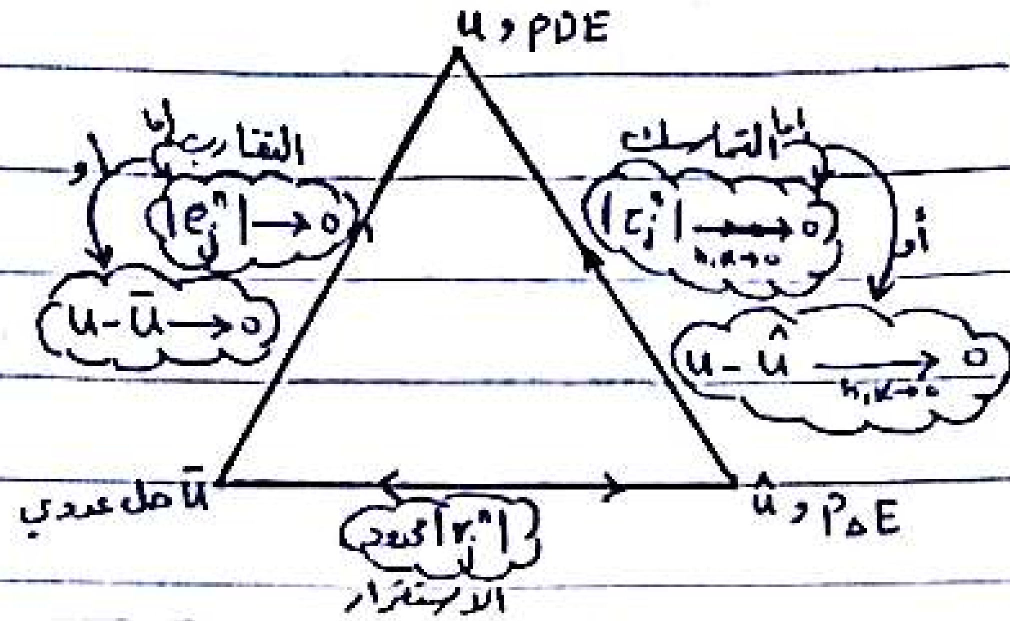
التماسك + الاستقرار $\Longrightarrow$ التقارب

أي أنه لدراسة تقارب طريقة ما يكفي دراسة كل من تماسكها واستقرارها.

ملاحظة: غالباً ما يكون من السهل برهان التماسك، أما الاستقرار فهو الأكثر صعوبة وقد يكون مستحيلاً لذلك نركز دوماً على الاستقرار.

التقارب	الاستقرار	التماسك	
يتعلق بتقسيم الشبكة	يتعلق بتقسيم الشبكة	يتعلق بالصيغة المختارة (تقدمية، تراجعية، ....)	يتعلق بـ
$\bar{u}_j^n$ و $u(x_j, t_n)$	$\bar{u}_j^n$ و $\hat{u}_j^n$	PDE و PΔE	يربط بين
$\lim_{h,k \to 0} \lvert u(x_j, t_n) - \bar{u}_j^n \rvert = 0$	$\lim_{n \to \infty} \lvert \hat{u}_j^n - \bar{u}_j^n \rvert$ محدود (لا)	$\lim_{h,k \to 0} P\Delta E[\hat{u}] = PDE[\hat{u}]$	المبرهنة

ويعبر عن الجدول السابق بالمثلث التالي :



حيث: PDE : المعادلة التفاضلية الجزئية (الأصلية).

PΔE : معادلة الفروق للمعادلة الأصلية.

u : هو الحل الفعلي للمعادلة التفاضلية الجزئية PDE.

û : هو الحل الفعلي لمعادلة الفروق المنتهية.

*(يعتبر بمثابة الحل التقريبي لـ PDE وهذا الحل ينتج بحل AU=B بالطريقة التقليدية كما حلينا التمارين في المحاضرة الثالثة)

ū : الحل العددي لمعادلة الفروق PΔE

*(ū يعتبر حل تقريبي لـ û ناتج عن حل معادلة الفروق بأحد الطرق العددية التكرارية وسنأخذهم في المحاضرات القادمة وهو تقريبي لـ û لأنه ناتج عن الانقطاع أي (خطأ التدوير).)

يعرف خطأ التدوير الكلي بـ: $r_j^n = \bar{u}_j^n - \hat{u}_j^n$

Note :: إن المثلث ورموزه ودلالة الرموز هامة للكلمات التي حتماً يجب حفظها لأنها تأتي سؤال امتحاني بـ 6 ـ 10 درجات ::

انتهت المحاضرة ..... ::