القسم: الرياضيات السنة: الرابعة المحاضرة: الأولى

المادة: حلول عددية الدكتورة: بر لنت مطيط التاريخ: يوم: 17 / 3 / 2017

مقدمة: تعد نظرية الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية و التكاملية من أهم المقررات الرياضية، نظراً لما لها من تطبيقات في فروع العلوم الهندسية والفيزيائية و العلوم الأخرى، كما نعلم أن التحليل العددي يقوم على إيجاد الخوارزميات للوصول إلى حلول تقريبية للمسألة الرياضية التي يكون حلها التحليلي الدقيق والعام مكلفاً أو غير معروف.

نحتاج في بعض الأحيان لحل معادلات تفاضلية جزئية، ويكون الحل التحليلي لمثل هذه المعادلات صعب جداً، بل مستحيل في بعض الحالات. ضمن الإمكانات الرياضية المتاحة فإننا نلجأ للتحليل العددي لإيجاد الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية التي ندرسها. سيتم في هذا المقرر دراسة بعض الخوارزميات المتبعة لإيجاد الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية بمتحولين.

Note: عادةً ما تكون دراسة حل المعادلة التفاضلية في منطقة محددة ما، ويختلف حل هذه المعادلة حسب المنطقة التي تتم الدراسة فيها.

مثلاً: دراسة معادلة الحرارة في غرفة منتظمة على شكل متوازي مستطيلات تختلف عن دراستها في أنبوب متعرج غير منتظم الشكل.

ولذلك من المهم دوماً معرفة المنطقة التي نقوم بإيجاد حل المعادلة فيها حتى يتم اختيار الطريقة المناسبة للحل تبعاً لها.

Note: معطيات المسألة ستكون عبارة عن: معادلة تفاضلية + شروط الحدية.

مفاهيم أساسية في المعادلات التفاضلية الجزئية وحلولها العددية بطرائق تكرارية:

المعادلة التفاضلية الجزئية:

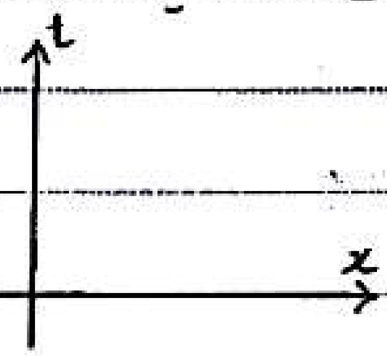
تعريف: المعادلة التفاضلية الجزئية هي معادلة تحوي مشتقات جزئية وأن التابع في

في المعادلات التفاضلية الجزئية يعتمد على أكثر من متغير، مثل التابع $u(x,t)$ فإنه يعتمد على المتغيرين x و t.

ونستخدم في دراستنا الرموز التالية:

$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ ، $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ، $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ، $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ، $u_{xt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$

Note: نستخدم في الحالات العادية الرمزين x ، y للمتحولين ولكن في المسائل التطبيقية عادة ما يكون أحد المتحولين المدروسين هو الزمن، لذلك سنسمي ذلك المتحول بالمتحول الزماني ونرمزله ب t بينما سندعو المتحول الآخر بالمتحول المكاني ونرمزله ب x وبالتالي يكون رمز الدالة المدروسة هو $u(x,t)$.



مرتبة المعادلة التفاضلية الجزئية:

هي مرتبة أعلى مشتق جزئي تحويه المعادلة وما سنأخذه في هذا المقرر المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية أي تحوي u_{xx} أو u_{tt} أو كلاهما

المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية والغير الخطية:

تقسم المعادلات التفاضلية الجزئية إلى قسمين خطية وغير خطية وتكون المعادلة التفاضلية الجزئية خطية إذا تحقق الشرطان التاليان

1- إذا كان التابع ومشتقاته الجزئية من الدرجة الأولى.

2- إذا كانت أمثال التابع ومشتقاته ثوابتاً أو متغيرات مستقلة.

وفيما عدا ذلك تكون المعادلة التفاضلية الجزئية غير خطية.

مثال: المعادلة: $x u_{xx} + y u_{yy} = 0$ معادلة خطية حيث x, y متغيرات مستقلة

بينما المعادلة: $u_x + \sqrt{u} = 0$ معادلة غير خطية بسبب وجود الحد $\sqrt{u}$.

وما سندرسه في هذا المقرر المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية ومن المرتبة الثانية.

تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية:

إن الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية بالمتغيرين المستقلين x و t تعطى كالتالي:

$$(*) \quad A u_{xx} + B u_{xt} + C u_{tt} + D u_x + E u_t + F u = G$$

حيث أن A, B, C, D, E, F, G ثوابت أو توابع للمتغيرين x و t.

تصنف المعادلة التفاضلية الجزئية $(*)$ إلى ثلاث أصناف رئيسية وهي:

1. مكافئية: وهي المعادلة التي تحقق الخاصة: $\Delta = B^2 - 4AC = 0$

مثال: إن معادلة الحرارة $u_t = D u_{xx}$ هي معادلة مكافئية.

2. زائدية: وهي المعادلة التي تحقق الخاصة: $\Delta = B^2 - 4AC > 0$

مثال: إن معادلة الموجة $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ هي معادلة زائدية.

3. ناقصية: وهي المعادلة التي تحقق الخاصة: $\Delta = B^2 - 4AC < 0$

مثال: إن معادلة لابلاس $u_{xx} + u_{yy} = 0$ هي معادلة ناقصية.

مثال:

إن المعادلة $u_{xx} + x u_{yy} = 0$

بمقارنة هذه المعادلة مع $(*)$ نجد أن $A = 1$ ، $B = 0$ ، $C = x$

بحساب Δ نجد أن $\Delta = B^2 - 4AC = -4x$ وهنا x ثابت مستقل وعليه فإن المعادلة السابقة تكون مكافئية إذا كان $x = 0$ ، وزائدية إذا كان $x < 0$ ، وناقصية إذا كان $x > 0$.

المعادلة التفاضلية الجزئية جيدة الطرح:

يقال عن مسألة تتضمن معادلة تفاضلية إنها جيدة الطرح إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

1. إذا كان الحل موجوداً.

2. إذا كان الحل وحيد.

3. إذا كان الحل يعتمد بشكل مستمر على المعطيات أو الشروط المرفقة مع المسألة.

وفي حال اختل أحد الشروط السابقة فإن المسألة عندئذ تسمى مريضة.

مثال: لتكن المعادلة التفاضلية $u''=0$ حيث $x\in]0,1[$ مع الشروط

$u'(0)=0$ و $u'(1)=1$

إن حل المعادلة السابقة هو $u(x)=A+Bx \Rightarrow u'(x)=B$

بتعويض الشرطين نجد أن:

$$\left.\begin{array}{l} u'(0)=B=0 \\ u'(1)=B=1 \end{array}\right\}$$

وهذا تناقض لأن الثابت B له قيمتين بنفس الوقت وعليه الحل غير موجود وبالتالي المسألة مريضة لأنه اختل أحد الشروط.

مثال: لتكن المعادلة $u''=0$ مع الشروط $u'(0)=0$ و $u'(1)=0$

إن حل المعادلة السابقة هو $u(x)=A+Bx \Rightarrow u'(x)=B$

نعوض الشروط فنجد أن:

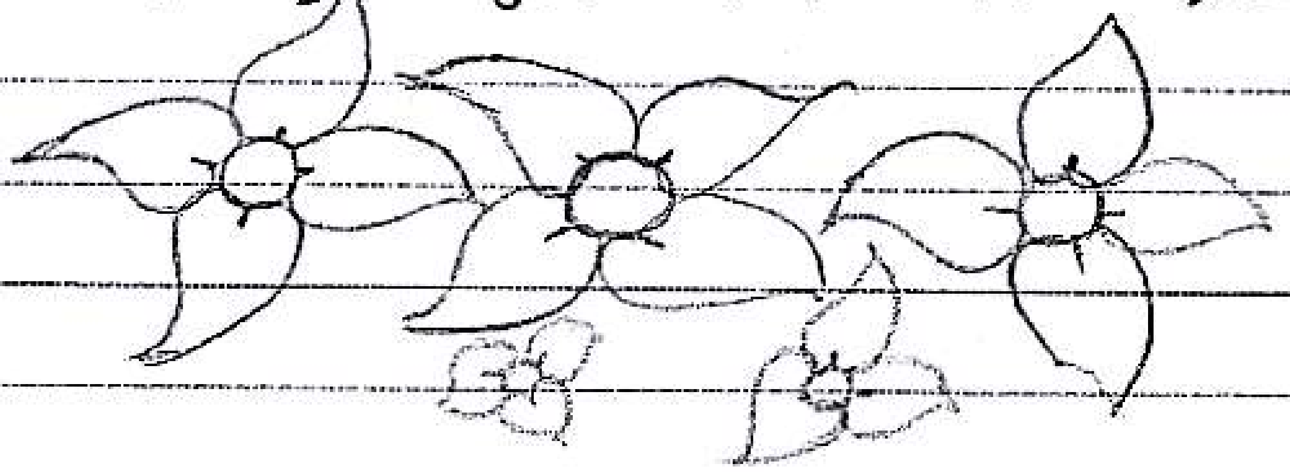
$$\left.\begin{array}{l} u'(0)=B=0 \\ u'(1)=B=0 \end{array}\right\}$$

وبتعويض قيمة B بالحل نجد أن $u(x)=A$ ولكن قيمة A غير معينة وبالتالي الحل غير وحيد وعليه فإن المسألة مريضة لأنه اختل أحد الشروط

مثال: لتكن D منطقة محدودة في المستوي xy وحدودها S وليكن F تابعاً كيفياً مستمراً على D وليكن g تابعاً مستمراً على S عندئذ مسألة ديرخليه التالية: $\nabla^2 u(x,y)=F(x,y)$ in D and $g=u$ on S

هي جيدة الطرح لأنها تحقق الشروط الواردة في التعريف السابق.

معلومة: شرط ديرخليه هو أحد أنواع الشروط الحدية والتي تعطينا قيمة الدالة على المحيط، وله الشكل: $u=g(x)$ on Γ حيث Γ هو المحيط.



مثال ٣: لتكن لدينا معادلة لابلاس التالية:

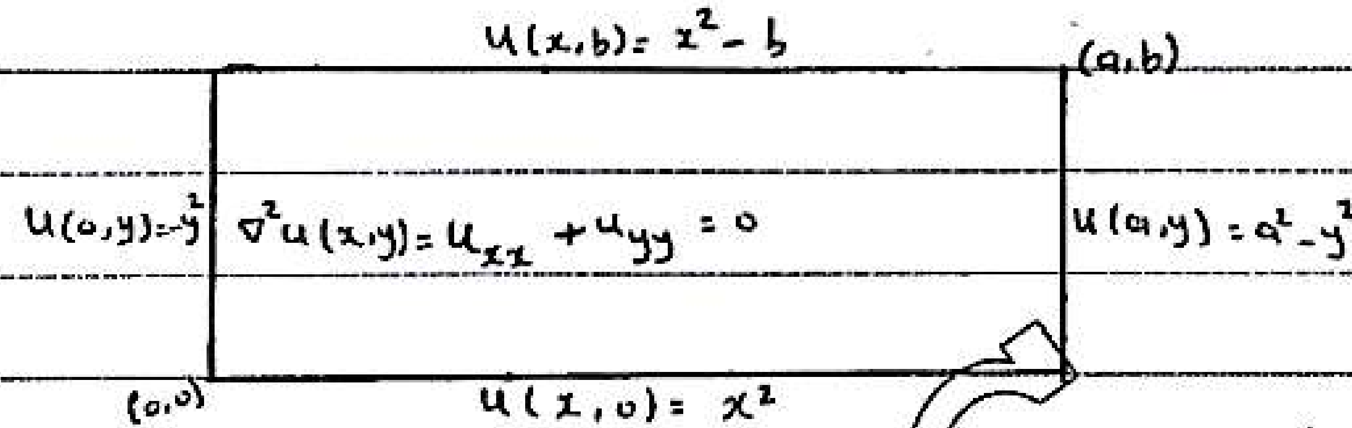
$\nabla^2 u(x,y) = 0$ in $0<x<a$, $0<y<b$

وشروط ديرخليه الحدية:

$$u(x,0) = x^2 \quad , \quad u(x,b) = x^2 - b$$

$$u(0,y) = -y^2 \quad , \quad u(a,y) = a^2 - y^2$$

كما في الشكل التالي:



إن هذه المسألة هي صحيحة الطرح حيث أنها تحقق الشروط الواردة في التعريف وحلها الوحيد ضمن الشروط هو $u(x,y) = x^2 + y^2$

إذا حذفنا أحد الشروط الحدية عندئذ ستكون المسألة مريضة وذلك لوجود أكثر من حل للمسألة.

سوف نتحدث عن طريقتين لحل المعادلات السابقة حلاً تقريبياً:

١- طريقة الفروق المنتهية

Finite Difference Methods

تستخدم عادةً عندما تكون منطقة الدراسة بسيطة ومنتظمة حيث يتم رسم شبكة منتظمة، و أخذ المعادلة التفاضلية عند كل نقطة من نقاط الداخلية للشبكة وبعد تطبيق الطريقة العددية للفروق نجد تمثيل مصفوفي للمسألة، يمكن حله باستخدام الطرائق العددية لحل جملة معادلات خطية.

ومن مساوئ هذه الطرائق أنه كلما صغرت التقسيمات الشبكية زادت الدقة، وكلما ازداد عدد النقاط زاد عدد المعادلات وصعب إيجاد الحل.

ويحصل هنا عندما تكون منطقة الدراسة معقدة أو غير منتظمة والأفضل في هذه الحالة استخدام طريقة العناصر المنتهية.

2- طريقة العناصر المنتهية: finite element method

تستخدم عادة للمسائل الممتدة غير المنتظمة لأنها تتيح إمكانية استخدام عدة أنواع من أشكال العناصر (مستطيلات، مربعات، مثلثات، ...) مع بعضها البعض لتقسيم المنطقة المدروسة، ثم نقوم باختيار توابع اختبار لكل من العناصر المأخوذة بحيث تحقق الشروط الحدية.

• إن جودة كل من الطريقتين السابقتين في إيجاد حل تقريبي للمسألة المعطاة متقاربة ولكن كلفة طريقة العناصر المنتهية أكبر بكثير من طريقة الفروق المنتهية في حال كانت المنطقة منتظمة بينما تزداد كلفة طريقة الفروق المنتهية كلما ازداد تعقيد المنطقة لتصبح طريقة العناصر المنتهية أفضل في هذه الحالة.

* أما الآن سنبدأ مع أول طريقة وهي طريقة الفروق المنتهية:

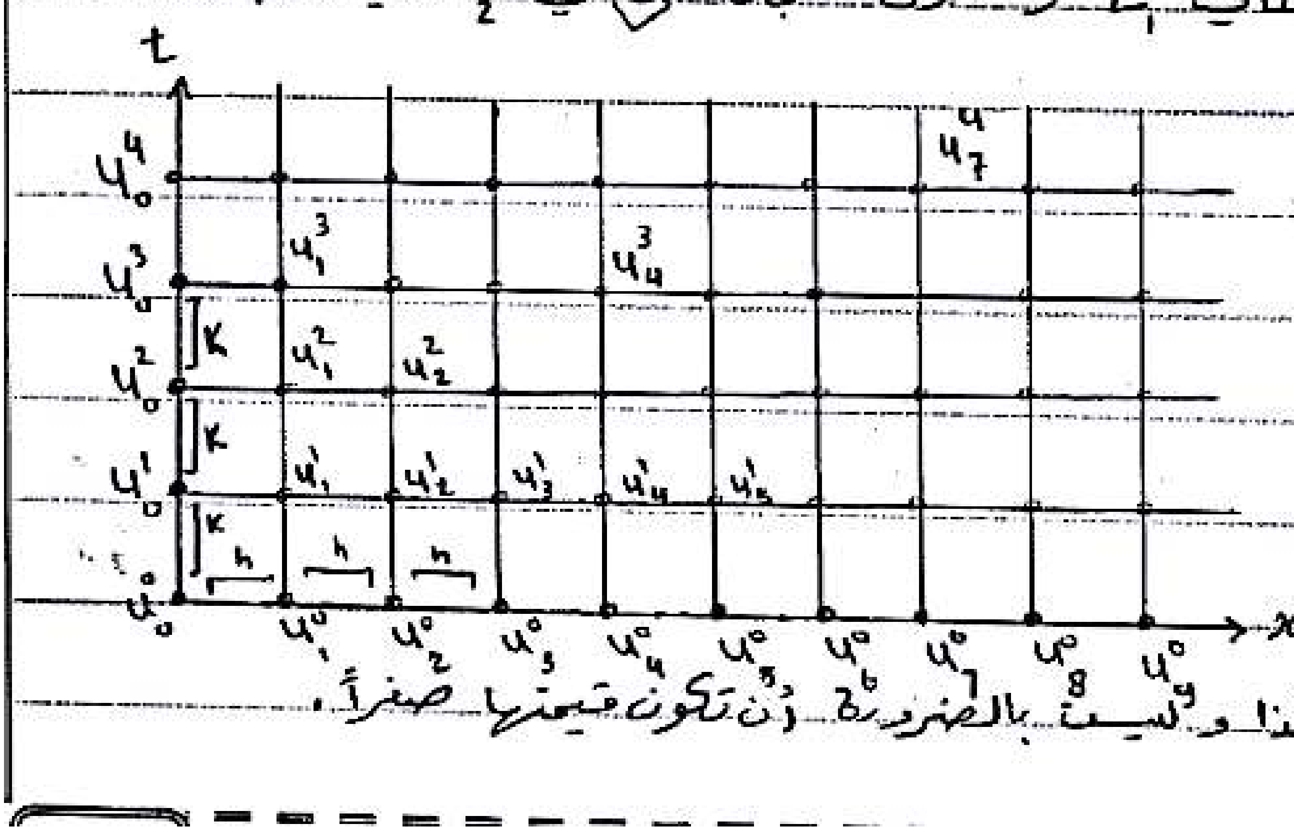
ليكن m هو عدد التقسيمات المكانية للشبكة (أي على المحور x) وليكن n هو عدد التقسيمات الزمانية للشبكة (أي على المحور t) عندئذ نرمز:

$h = \Delta x = \frac{L_1}{m}$ بالمقياس المكاني الشبكي، حيث L_1 طول المجال المكاني.

$K = \Delta t = \frac{L_2}{n}$ بالمقياس الزماني الشبكي، حيث L_2 طول المجال الزماني.

حيث h, K ثابتين ينتميان للمجال $]0,1[$.

Note: طول المجال المكاني L_1 وطول المجال الزماني L_2 ليس بالضرورة أن تبدأ من الصفر.

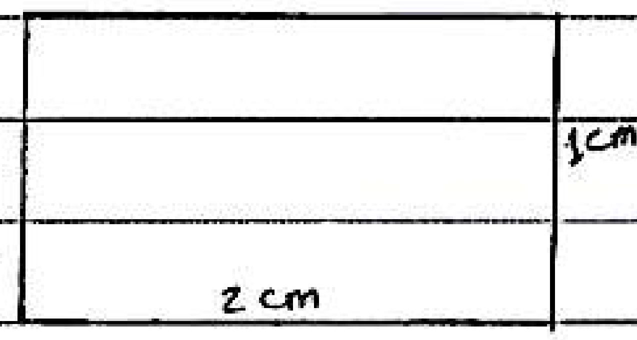


رسم توضيحي للشبكة مع تسمية نقاط بالاتفاق مع دكتورة حيث:

$u_1^0 = u(x_1, y_0)$

$u_7^4 = u(x_7, y_4)$ وهكذا وليست بالضرورة أن تكون قيمتها صفراً.

مثال ٣: لتكن لدينا المنطقة المستطيلة الشكل التالية:



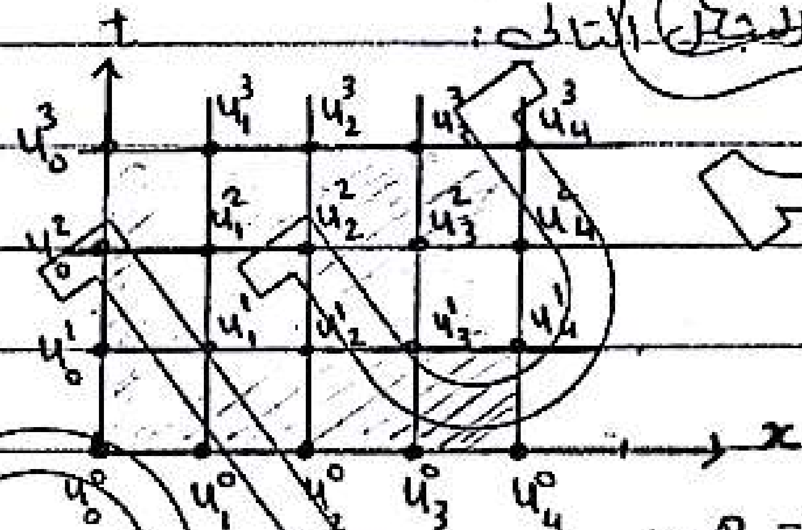
ارسم الشبكة حيث $n=3$ ، $m=4$.

الحل: لدينا $m=4$ عدد تقسيمات المكانية و $n=3$ عدد التقسيمات الزمانية

لحساب القياس المكاني $h=\Delta x=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ ولحساب القياس الزماني

$$k=\Delta t=\frac{1}{3}$$

وعندئذ للشبكة الشكل التالي:



إن نقاط تقاطع الشبكة هي:

$u_0^0=u(x_0,t_0)$ ، $u_1^0=u(x_1,t_0)$ ، $u_2^0=u(x_2,t_0)$ ، $u_3^0=u(x_3,t_0)$

$u_4^0=u(x_4,t_0)$ ، $u_0^1=u(x_0,t_1)$ ، $u_1^1=u(x_1,t_1)$ ، $u_2^1=u(x_2,t_1)$

$u_3^1=u(x_3,t_1)$ ، $u_4^1=u(x_4,t_1)$ ، $u_0^2=u(x_0,t_2)$ ، $u_1^2=u(x_1,t_2)$

$u_2^2=u(x_2,t_2)$ ، $u_3^2=u(x_3,t_2)$ ، $u_4^2=u(x_4,t_2)$ ، $u_0^3=u(x_0,t_3)$

$u_1^3=u(x_1,t_3)$ ، $u_2^3=u(x_2,t_3)$ ، $u_3^3=u(x_3,t_3)$ ، $u_4^3=u(x_4,t_3)$

وإن القيم هذه النقاط هي قيم التابع في الزمان والمكان المقابلين.

إن النقاط u_0^0 ، u_1^0 ، u_2^0 ، u_3^0 ، u_4^0 ، u_4^1 ، u_4^2 ، u_4^3 ، u_3^3 ، u_2^3 ، u_1^3

u_0^3 ، u_0^2 ، u_0^1 هي عبارة عن نقاط حدية في الشبكة السابقة

والحل عندها يكون معروفاً من الشروط الحدية المعطاة للمسألة وهي تحل ما نقوم

بإيجاده، أما بقية النقاط: u_1^1 ، u_2^1 ، u_3^1 ، u_1^2 ، u_2^2 ، u_3^2 هي نقاط الداخلية

ويكون الحل عند كل منها هو الحل للمعادلة التفاضلية المعطاة ، وهذه الحلول سنقوم بإيجادها باستخدام طريقة الفروق المنتهية في المحاضرات القادمة .

** ملاحظات : 1- نلاحظ أن الحل هو عبارة عن حل نقطي عند النقاط الحدية والداخلية حيث أن التحليل العددي لا يعطي حلاً مستمراً ، وإنما يعطي حلاً نمطياً متقطعاً .

2- أن الحل العددي والحل الفعلي يتطابقان عند النقاط الحدية أي يكون الخطأ معدوماً عنده بينما تعجب أخطاء عند النقاط الداخلية .

** القوانين الأساسية لطريقة الفروق المنتهية :

المبدأ الأساسي في طريقة الفروق المنتهية هو تقريب المشتقات في المعادلة التفاضلية إلى توابع عند قيم .

لدينا ثلاث أنواع من الفروق :

1- الفروق التقدمية

2- الفروق التراجعية .

3- الفروق المركزية .

سنتكلم في المحاضرات القادمة عن كل نوع بالتفصيل .

انتهت المحاضرة

^^

القسم: الرياضيات السنة: الرابعة المحاضرة: الثانية

المادة: حلول عددية الدكتور: بثينة مطيط التاريخ: يوم: 20 / 3 / 2017

مقدمة: تناولنا في المحاضرة السابقة مجموعة من المفاهيم الأساسية في المعادلات التفاضلية الجزئية من تعريفها ومرتبتها ونوعها (خطية أو غير خطية) وتصنيفها (معادلة الحرارة، معادلة الموجة، معادلة لابلاس) وتعريف المعادلات التفاضلية الجزئية جيدة الطرح وبعض الأمثلة التوضيحية وبعض الملاحظات المهمة ومن ثم تطرقنا في الحديث عن طرق لحل معادلات تفاضلية الجزئية حلاً تقريبياً (طريقة الفروق المنتهية و طريقة العنصر المنتهية) وبعدها تعلمنا ما هي نقاط الحدية وما هي النقاط الداخلية وكيف تواجدهم ضمن الشبكة ومن نهاية المحاضرة السابقة أوجدنا القوانين الأساسية لطريقة الفروق المنتهية أما اليوم سنتكلم عن كل قانون بشكل مفصل وتعريف الشروط الحدية والابتدائية ثم نقوم بعرض تمارين عن حل المعادلات تفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية بطريقة الفروق المنتهية.

الشروط الابتدائية والشروط الحدية للمعادلات التفاضلية الجزئية:

عندما يأتي سؤال حل المعادلة التفاضلية الجزئية فإن هذه المعادلة ترفق بشروط إما شروط ابتدائية أو شروط حدية

الشروط الابتدائية: إذا كان الزمن t أحد المتغيرات المستقلة في المعادلة التفاضلية الجزئية عندئذ يكون الشرط المعطى في هذه الحالة $t=0$ هو شرط ابتدائي وتشكل المعادلة التفاضلية الجزئية مع الشرط الابتدائي مسألة قيم ابتدائية.

الشروط الحدية: تعطي بيانات إضافية على محيط المنطقة المدروسة ونرمز للمحيط بـ Γ ولها عدة أنواع: 1) شروط ديرخليه: تعطينا قيمة الدالة على المحيط ولها الشكل: $u=f(x,y)$ on Γ

أي $x,y\in\Gamma$

Scanned by CamScanner

2) شرط نيومان: وتعطي قيمة مشتق الدالة على المحيط ولها الشكل:

$$u_x = f(x,y) \quad \text{on } \Gamma$$

3) الشروط المختلطة: وتجمع بين شروط ديرخليه ونيومان وفي حال كانت هذه الشروط المختلطة خطية بالنسبة لكل من ديرخليه ونيومان فتدعى شروط روبن (روبنز) أي أن لشرط روبن الشكل: $\alpha u + \beta u_x = f(x,y)$ on Γ حيث α, β ثوابت

Note: إن المعادلة التفاضلية الجزئية مع شروط ديرخليه الحدية تسمى مسألة قيم حدية من النوع الأول

2- إن المعادلة التفاضلية الجزئية مع شروط نيومان الحدية تسمى مسألة قيم حدية من النوع الثاني.

3- إن المعادلة التفاضلية الجزئية مع شروط روبنز الحدية تسمى مسألة قيم حدية من النوع الثالث.

تذكرة في قوانين الفروق المنتهية (لدالة ذات متغير واحد):

نعلم أن الاشتقاق هو تغير (تفاضل) الدالة مقسوماً على تغير متغير هذه الدالة، وهناك عدة أشكال للتعبير عن ذلك:

1) الشكل التقدمي: ويعني إيجاد قيمة مشتق الدالة عند نقطة ما اعتماداً على قيمتي الدالة عند النقطة نفسها والنقطة التي تليها:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

2) الشكل التراجعي: ويعني إيجاد قيمة مشتق الدالة عند نقطة ما اعتماداً على قيمتي الدالة عند النقطة نفسها والنقطة التي تسبقها:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h)$$

3) الشكل المركزي: ويعني إيجاد قيمة مشتق الدالة عند نقطة ما اعتماداً على قيمتي الدالة عند النقطة السابقة والنقطة التالية:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + O(h^2)$$

الشكل المركزي للمشتق الثاني :

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)$$

Note: نلاحظ أن مرتبة الخطأ في الطريقة المركزية أصغر من مرتبة الخطأ في الطريقتين التقدمية والتراجعية (كون $0<h<1 \Leftarrow h^2 < h$) ولذلك نحبذ اختيار الشكل المركزي بشكل عام.

Note: عندما نقول عن التابع f أنه يساوي المقدار $f = O(h^n)$ فهذا يعني أن المقدار $\frac{f}{h^n}$ يسعى إلى الصفر عندما $h \to 0$.

قوانين الفروق المنتهية (الدالة ذات متغيرين):

تعتمد طريقة الفروق المنتهية على تبديل كل مشتق من المشتقات الجزئية في المعادلة التفاضلية الجزئية بمكافئ لها من قوانين الفروق (التقدمية، التراجعية، المركزية) والتي تكون كما يلي تبعاً للمتغير الذي نقوم بالاشتقاق بالنسبة إليه:

1) الاشتقاق بالنسبة للمتغير الزماني t:

هنا لدينا عداد i لـ x وعداد j لـ t في هذه الحالة نثبت العداد (i) ونحرك العداد j.

التقدمي:
$$u_t(x_i, t_j) = \frac{u_i^{j+1} - u_i^{j}}{\boxed{K}}$$

التراجعي:
$$u_t(x_i, t_j) = \frac{u_i^{j} - u_i^{j-1}}{\boxed{K}}$$

المركزي:
$$u_t(x_i, t_j) = \frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2K}$$

المركز المشتق من المرتبة الثانية:
$$u_{tt}(x_i, t_j) = \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^{j} + u_i^{j-1}}{K^2}$$

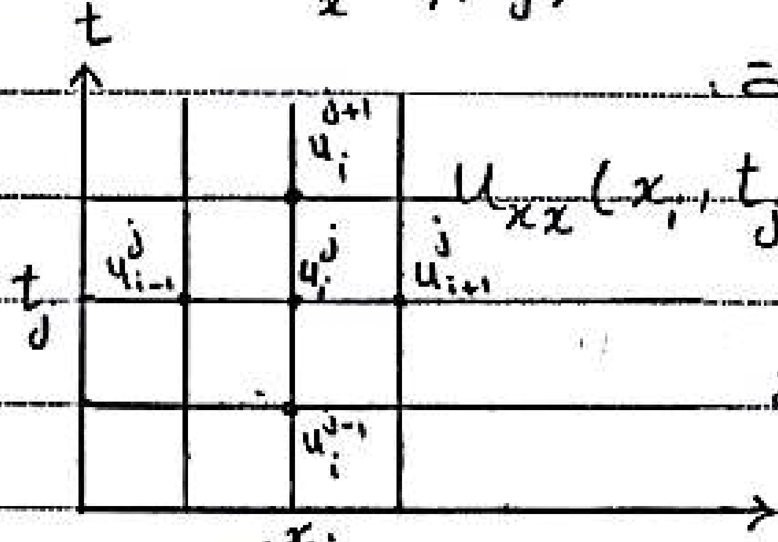
2) الاشتقاق بالنسبة للمتغير المكاني x: هنا نثبت العداد (j) ونحرك العداد (i):

التقدمي:
$$u_x(x_i, t_j) = \frac{u_{i+1}^{j} - u_i^{j}}{\boxed{h}}$$

التراجعي:
$$u_x(x_i, t_j) = \frac{u_i^{j} - u_{i-1}^{j}}{h}$$

ت) المركزي: $u_x(x_i,t_j) = \frac{u^j_{i+1} - u^j_{i-1}}{2h}$

ت) المركزي للمشتق من المرتبة الثانية:



$$u_{xx}(x_i,t_j) = \frac{u^j_{i+1} - 2u^j_i + u^j_{i-1}}{h^2}$$

قام كلٌ من العلماء باختيار طرق معينة من الطرق السابقة (التقدمية التراجعية المركزية) واستبدالها بالمشتقات الجزئية في المعادلات التفاضلية الجزئية، وبهذه العملية نحصل على ما يسمى «معادلة الفروق المنتهية» وهي معادلة بسيطة بدلالة قيم f وليس بدلالة مشتقاتها.

مثال ١: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$u_{xx} + 2u_t = 0$$

أوجد معادلة الفروق للمعادلة السابقة

الحل: لدينا u_{xx} مشتق u بالنسبة للمتغير المكاني x ومن المرتبة الثانية حتماً سنستخدم الطريقة المركزية للمشتق من المرتبة الثانية

ولدينا u_t مشتق u بالنسبة للمتغير الزماني t ومن المرتبة الأولى وهنا نحن حرين في الاختيار بين (التقدمية - التراجعية - المركزية) وعليه تكون لدينا الشكل:

$$\frac{u^j_{i+1} - 2u^j_i + u^j_{i-1}}{h^2} + 2\,\frac{u^{j+1}_i - u^j_i}{K} = 0$$

وهي معادلة الفروق للمعادلة تفاضلية.

Note: لا يعني لدينا حل المعادلة التفاضلية باستخدام الطرق (طريقة الفروق المنتهية و طريقة العناصر المنتهية) دون دراسة الاستقرار وسنشرح بالتفصيل عنه في المحاضرات القادمة أما الآن فسنعرض نوعين من الأسئلة التي تطرح في هذه المادة:

السؤال الأول: أوجد الشكل المصفوفي $AU = F$ باستخدام طريقة الفروق المنتهية لحل المعادلة التفاضلية التالية، هذا السؤال يأتي عندما تكون عدد معادلات أكثر من 3 لأننا نستطيع حل معادلات من الدرجة الثانية والثالثة فقط باستخدام الآلة الحاسبة علماً أن الشكل المصفوفي هو كالآتي:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} \text{ثوابت} \end{pmatrix}} \underset{U}{\begin{pmatrix} \text{النقاط الداخلية} \end{pmatrix}} = \underset{F}{\begin{pmatrix} \text{الطرف الثاني (المعالم)} \end{pmatrix}}$$

إن المصفوفة A هي مصفوفة ثوابت لأننا ندرس معادلات تفاضلية جزئية خطية.

السؤال الثاني: أوجد حل المسألة التفاضلية باستخدام الفروق المنتهية هنا تكون جملة المعادلات الخطية من الرتبة 2×2 أو 3×3 وكلاهما يمكن استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد الحل.

تمرين: أوجد الشكل المصفوفي $AU = F$ باستخدام طريقة الفروق المنتهية لحل المسألة التالية:

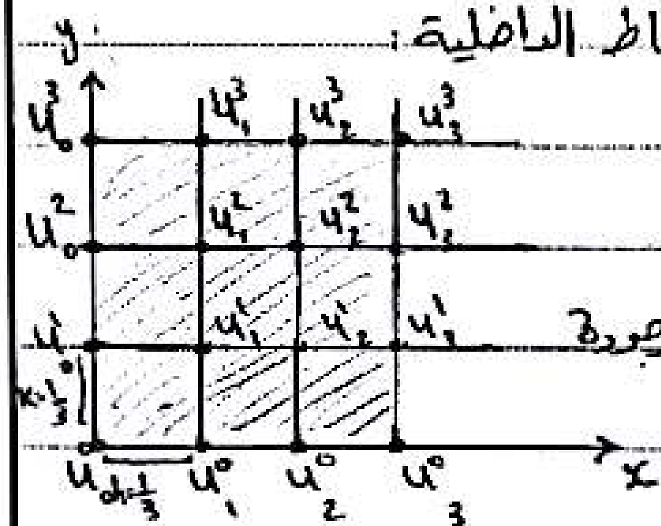
$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \leftarrow$ معادلة لابلاس تفاضلية

حيث إن المنطقة هي مربع: $R: \{0 \le x \le 1 ,\ 0 \le y \le 1\}$

وإن $u(x,y) = x^2 - y^2$ على حدود المنطقة ← شرط ديرخليه

وحيث $K = h = \frac{1}{3} \leftarrow$ القياس المكاني والزماني

الحل: أولاً نرسم المنطقة ونعين النقاط الحدية والنقاط الداخلية:



النقاط الحدية هي النقاط الموجودة على حدود المنطقة R أي

$u_1^3 ,\ u_2^3 ,\ u_3^3 ,\ u_3^2 ,\ u_3^1 ,\ u_3^0 ,\ u_2^0 ,\ u_1^0 ,\ u_0^0$

$u_0^1 ,\ u_0^2 ,\ u_0^3$ أما النقاط الداخلية هي النقاط الموجودة

داخل منطقة R وهي $u_1^1 ,\ u_2^1 ,\ u_1^2 ,\ u_2^2$

Note ملاحظة مهمة ذكرناها في المحاضرة السابقة وهي لا يوجد خطأ عند جميع نقاط الحدية أي الخطأ يساوي الصفر (لأن الحل الفعلي يتطابق مع الحل التقريبي)

Note يوجد خطأ عند النقاط الداخلية وهذا الخطأ سيتم دراسته بشكل مفصل في المحاضرات القادمة:

Note إن النقاط الحدية تفيدنا في إيجاد قيم النقاط الداخلية ولكن قد نستفيد منها جميعها أو لا.

Note إن النقاط الحدية تحقق الشروط الحدية أي النقاط الحدية التي لدينا تحقق شرط ديرخليه ($u(x,y) = x^2 - y^2$) الحدي.

Note عدد المعادلات الخطية بعدد النقاط الداخلية وهنا لدينا أربع نقاط داخلية وبالتالي سنحصل على أربعة جمل خطية..

ثانياً نوجد الآن معادلة الفروق المنتهية للمعادلة $u_{xx} + u_{yy} = 0$

هنا لدينا المشتق المكاني بالنسبة لـ x و المشتق الزماني بالنسبة لـ y من المرتبة الثانية لذلك سنستخدم الطريقة المركزية في الاثنان على الحالة وعليه بتطبيق نجد:

$$\frac{u_{i+1}^{j} - 2u_i^j + u_{i-1}^{j}}{h^2} + \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{k^2} = 0$$

لدينا $k = h$ نعوض في المعادلة الأخيرة فنحصل على:

$$\frac{u_{i+1}^{j} - 2u_i^j + u_{i-1}^{j}}{h^2} + \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{h^2} = 0$$

نخفف المقامات وذلك بضرب طرفي المعادلة بـ h^2 و نقوم بالإصلاح فنحصل:

$$u_{i+1}^{j} + u_{i-1}^{j} - 4u_i^j + u_i^{j+1} + u_i^{j-1} = 0$$

وهي معادلة الفروق لمعادلة لابلاس..

كما ذكرنا لدينا 4 نقاط داخلية $u_1^1, u_2^1, u_1^2, u_2^2$ وعليه لدينا أربع معادلات خطية ناتجة من تعويض قيم i و j في معادلة الفروق الأخيرة كما يلي:

$i=1, j=1 \Rightarrow u_2^1 + u_0^1 - 4u_1^1 + u_1^2 + u_1^0 = 0$

$i=2, j=1 \Rightarrow u_3^1 + u_1^1 - 4u_2^1 + u_2^2 + u_2^0 = 0$

$i=1, j=2 \Rightarrow u_2^2 + u_0^2 - 4u_1^2 + u_1^3 + u_1^1 = 0$

$i=2,\ j=2 \Rightarrow u_3^2 + u_1^2 - 4u_2^2 + u_2^3 + u_2^1 = 0$

ثالثاً نوجد القيم الحدية التي ظهرت في المعادلات الأربعة سابقة وهي u_1^0, u_0^2, u_0^1

$u_3^2, u_3^1, u_2^3, u_1^3, u_2^0$ وذلك بالاستفادة من الشرط الحدي المعطى وهو:

ومن كون $u(x,y)=x^2-y^2$ فعليه $h=K=\frac{1}{3}$ يكون $x_1=y_1=\frac{1}{3}$, $x_2=y_2=\frac{2}{3}$

$x_3=y_3=1$ ويمكن استنتاج ذلك باستخدام القانونين التاليين:

$$\boxed{\begin{aligned} y_j &= b + jK \\ x_i &= a + ih \end{aligned}}$$

هنا a و b تساوي صفر لأن $R=\{0<x\leq 1,\ 0<y\leq 1\}$

Note :: ليس دائماً الـ a و الـ b تساوي الصفر

$$u_0^1 = u(x_0,y_1) = u(0,\tfrac{1}{3}) = 0^2 - (\tfrac{1}{3})^2 = -\tfrac{1}{9}$$

$$u_0^2 = u(x_0,y_2) = u(0,\tfrac{2}{3}) = 0^2 - (\tfrac{2}{3})^2 = -\tfrac{4}{9}$$

$$u_1^0 = u(x_1,y_0) = u(\tfrac{1}{3},0) = (\tfrac{1}{3})^2 - 0^2 = \tfrac{1}{9}$$

$$u_2^0 = u(x_2,y_0) = u(\tfrac{2}{3},0) = (\tfrac{2}{3})^2 - 0^2 = \tfrac{4}{9}$$

$$u_1^3 = u(x_1,y_3) = u(\tfrac{1}{3},1) = -\tfrac{8}{9}$$

$$u_2^3 = u(x_2,y_3) = u(\tfrac{2}{3},1) = -\tfrac{5}{9}$$

$$u_3^1 = u(x_3,y_1) = u(1,\tfrac{1}{3}) = \tfrac{8}{9}$$

$$u_3^2 = u(x_3,y_2) = u(1,\tfrac{2}{3}) = \tfrac{5}{9}$$

نعوض الآن القيم التي حصلنا عليها في المعادلات الخطية الأربعة فنجد:

$$-\tfrac{1}{9} + u_2^1 + \tfrac{1}{9} + u_1^2 - 4u_1^1 = 0 \Rightarrow u_2^1 + u_1^2 - 4u_1^1 = 0$$

$$u_1^1 + \tfrac{8}{9} + \tfrac{4}{9} + u_2^2 - 4u_2^1 = 0 \Rightarrow u_1^1 + u_2^2 - 4u_2^1 = -\tfrac{4}{3}$$

$$-\tfrac{4}{9} + u_2^2 + u_1^1 - \tfrac{8}{9} - 4u_1^2 = 0 \Rightarrow u_2^2 + u_1^1 - 4u_1^2 = \tfrac{4}{3}$$

$$u_1^2 + \tfrac{5}{9} + u_2^1 - \tfrac{5}{9} - 4u_2^2 = 0 \Rightarrow u_1^2 + u_2^1 - 4u_2^2 = 0$$

ومنه الشكل المصفوفي:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}}_{A_2} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{pmatrix}}_{U_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}}_{F}$$

تمرين وظيفة :: أوجد حل المسألة السابقة بنفس الشروط علماً أن

$K = \frac{1}{4}$ و $h = \frac{1}{3}$

مثال :: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية : $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy}$

حيث إن المنطقة هي المربع المعرف كالتالي : $R : \{ 0 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le 1 \}$

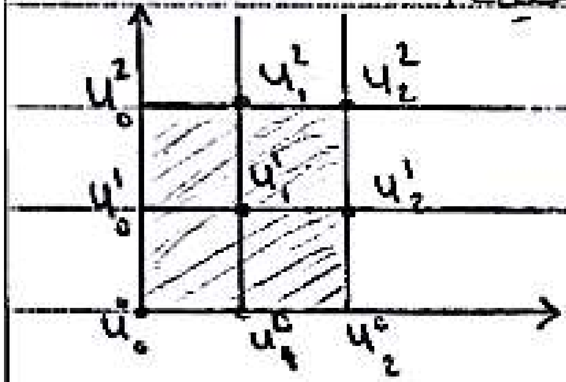
و إن الشروط الحدية هي :

شرط ديرخليه $u(x,y) = x^2 - y^2$ عندما $x = 0 \ , \ y = 0 \ , \ y = 1$

$u + u_x = x^2 + 2x - y^2$ عندما $x = 1$ ← شرط روبنز

أوجد الحل في R باستخدام طريقة الفروق المركزية وذلك بفرض $K = h = \frac{1}{2}$

الحل :: أولاً نرسم المنطقة ونبين النقاط الحدية والداخلية :



نقاط الحدية : $u_2^2 , u_1^2 , u_2^1 , u_2^0 , u_1^0 , u_0^2 , u_0^1 , u_0^0$

والنقطة الداخلية : u_1^1 وبالتالي لدينا معادلة واحدة

بتطبيق الفروق المركزية وبإجراء عمليات التمرين

السابق نجد معادلة الفروق التالية :

$$(*) \text{---} \ u_{i+1}^{j} + u_{i-1}^{j} - 4 u_i^j + u_i^{j+1} + u_i^{j-1} = 0$$

أما المعادلة الخطية التابعة لنقطة داخلية u_1^1 ناتجة من تعويض قيم الدوال في

المعادلة $(*)$ فنجد :

$$i = 1 , j = 1 \Longrightarrow u_0^1 + u_2^1 + \widehat{u_1^0} + \widehat{u_1^2} - 4 u_1^1 = 0$$

إن $x_1 = y_1 = \frac{1}{2}$ ، $x_2 = y_2 = 1$ وبالاستفادة من الشرط الحدي الأول فيمكن إيجاد القيم

الحدية التالية : $u_2^0 = u(x_2 , y_0) = 1 \ , \ u_2^2 = u(x_2 , y_2) = 0$

$$u_0^1 = u(x_0 , y_1) = u(0 , \tfrac{1}{2}) = 0^2 - (\tfrac{1}{2})^2 = -\frac{1}{4}$$

$$u_1^0 = u(x_1 , y_0) = u(\tfrac{1}{2} , 0) = \frac{1}{4}$$

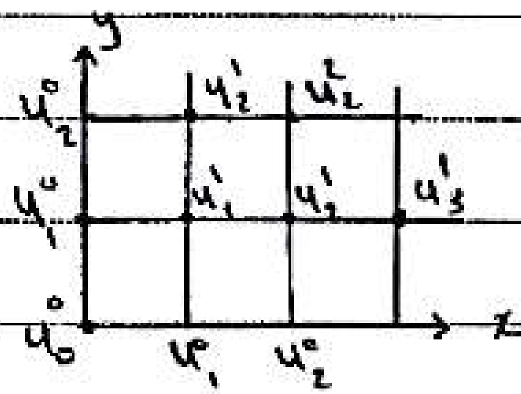
$$u_1^2 = u(x_1 , y_2) = u(\tfrac{1}{2} , 1) = -\frac{3}{4}$$

إن النقطة u_2^1 هي نقطة حدية لكن لا يمكن إيجادها إلا باستخدام شرط روبنز

الحدي الثاني ولكن الشرط معقد لوجود u_x ولا نعلم من هي u لذلك

سنعوض u_x في عبارة هذا الشرط بقانون الفروق المركزية من المرتبة الأولى بالنسبة لـ x وذلك باعتبار وجود نقطة وهمية على يمين u_2^1 وهي u_3^1 كما يلي:

$$u_2^1 + \frac{\partial u}{\partial x}\Big]_{2,1} = (x^2+2x-y^2)\Big]_{x_2=1,\ y_1=\frac{1}{2}}$$



$$u_2^1 + \frac{u_3^1 - u_1^1}{2h} = (1)^2 + 2(1) - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

لدينا $h = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow u_2^1 + u_3^1 - u_1^1 = \frac{11}{4} \quad (1)$$

Note: إن وجود النقطة الوهمية u_3^1 جعل نقطة u_2^1 داخلية وعليه المعادلة الخطية التابعة لها تأتي كي تعوض قيم أول في معادلة الفروق فنجد:

$$i=2,\ j=1 \Rightarrow u_3^1 + u_1^1 - 4u_2^1 + u_2^2 + u_2^0 = 0$$

بتعويض قيم النقاط الحدية u_2^2 و u_2^0 نحصل على:

$$u_3^1 + u_1^1 - 4u_2^1 = -1 \quad (2)$$

بطرح المعادلتين (1) و (2) نجد

$$2u_1^1 - 5u_2^1 = -\frac{15}{4} \quad (**)$$

والمعادلة الخطية لـ u_1^1 بعد تعويض قيم الحدية هي: $u_2^1 - 4u_1^1 = \frac{3}{4} \quad (***)$

بحل المعادلتين (**) و (***) ملاءمة كالتالي:

$$\begin{cases} 2u_1^1 - 5u_2^1 = -\frac{15}{4} \\ -4u_1^1 + u_2^1 = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow u_1^1 = 0,\quad u_2^1 = \frac{3}{4}$$

باستخدام الآلة الحاسبة: Mode → 5 → 1 → نقوم بتعبئة → =

↓

تنتج الأجوبة بالترتيب.

تمرين وظيفة: أعد التمرين السابق مع استبدال المشتق u_x بمعادلة الفروق التراجعية ...

انتهت المحاضرة