نظري

◄ دكتور المادة: هدى الشماط

◄المحاضرة الخامسة عنوان المحاضرة: استمرار الدوال لمتحولين

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـمجموع و جداء دالتين

٢ـنهاية مجموع دالتين

٣ـاستمرار الدوال لعدة متحولات

تعريف: (مجموع وجداء وقسمة دالتين) لتكن:

$$f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$g: T \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$1)\ f+g: S\cap T \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto (f+g)(x) = f(x)+g(x)$$
$$2)\ f\,.\,g: S\cap T \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto (f.g)(x) = f(x).g(x)$$
$$3)\ \frac{f}{g}: S\cap T\backslash\{x: g(x)=0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

مبرهنة:

لتكن $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و $g: T \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ، ولتكن x_0 نقطة حدية لـ $S\cap T$ ،

فإذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

عندئذ : $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = A+B$

الإثبات:

$$\forall \varepsilon > 0, \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists \delta_1 > 0:\ \ 0 < ||x-x_0|| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-A| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

$$\forall \varepsilon > 0, \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists \delta_2 > 0: \ \ 0 < ||x - x_0|| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = B$$

بالاستفادة من المتراجحتين السابقتين:

$$|f(x) - A + g(x) - B| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
$$\Rightarrow |f(x) - A + g(x) - B| < \varepsilon$$
$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0\,, 0 < \|x - x_0\| < \delta$$
$$\Rightarrow |(f + g)(x) - (A + B)| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = A + B$$

مبرهنة:

لتكن $g: T \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ، لتكن x_0 نقطة حدية لـT، ولنفرض $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$ عندئذ:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B} \quad , \qquad (\,g(x) \neq 0\,, B \neq 0)$$

الإثبات:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = B \Leftrightarrow \ \forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\,, 0 < ||x - x_0|| < \delta \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon$$

الآن نأخذ:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B - g(x)}{g(x).B}\right| < \frac{\varepsilon}{|g(x)|.|B|} \ \dots\dots\dots (*)$$

و ذلك بسبب ما يلي :

$$|g(x) - B| < \varepsilon \Rightarrow |-[g(x) - B]| < \varepsilon \Rightarrow |B - g(x)| < \varepsilon$$

أيضاً لدينا :

$$|B| = |B - g(x) + g(x)| \leq |B - g(x)| + |g(x)| < \varepsilon + |g(x)|$$
$$\Rightarrow |B| - \varepsilon < |g(x)|$$
$$\underset{\text{نقلب}}{\Rightarrow} \frac{1}{|B| - \varepsilon} > \frac{1}{|g(x)|} \qquad \Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{|B| - \varepsilon}$$

نعوض في (*) فنجد أن:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \frac{\varepsilon}{|B|(|B| - \varepsilon)}$$

وبما أن ε عدد موجب اختياري ، نختار $(**) \dots \varepsilon = \frac{|B|}{2}$ بالتعويض نجد:

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{B}\right|<\frac{\frac{|B|}{2}}{|B|\left[|B|-\frac{|B|}{2}\right]}<\frac{\frac{|B|}{2}}{|B|\left[\frac{|B|}{2}\right]}=\frac{1}{|B|}\underset{(**)\text{حسب}}{=}\frac{1}{2\varepsilon}$$

ومنه:

$$\forall\,\varepsilon>0,\exists\delta>0,0<||x-x_0||<\delta\,,\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{B}\right|<\frac{1}{2\varepsilon}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{B}$$

استمرار الدوال التابعة لعدة متغيرات

لتكن $f:S\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ولتكن $x_0\in S$ عندئذٍ نقول عن f إنها مستمرة عند x_0 $\Leftrightarrow$

$$\forall\,\varepsilon>0,\exists\delta>0,||x-x_0||<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

f مستمرة على S $\Leftrightarrow$ f مستمرة في كل نقطة من نقاط S.

مبرهنة :

ليكن $f:S\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ولتكن $x_0\in S$، عندها تكون f مستمرة في x_0 إذا وفقط إذا:

١) قابل كل جوار V لـ $f(x_0)$ من $\mathbb{R}$ جوار U لـ $x_0\in U$ وبحيث:

$\forall x\in S\cap U$ فإن $f(x)\in V$.

٢) إذا كانت المتتالية $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ من عناصر S متقاربة من x_0 فإن:

$\{f(x_m)\}$ تكون متقاربة من $f(x_0)$.

مبرهنة: لتكن $f:S\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ولتكن $x_0\in S\cap S'$ عندها:

$$f\text{ مستمر في }x_0\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

الإثبات: لنفرض أن f مستمرة عند x_0 عندئذٍ تحقق أنّ:

$$\forall\,\varepsilon>0,\exists\delta>0:||x-x_0||<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

لكن $x_0\in S'$ أي x_0 نقطة حدية $x\neq x_0$

$$\forall\,\varepsilon>0,\exists\delta>0:0<||x-x_0||<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

و بالعكس ، لنفرض أن $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

$$\forall\,\varepsilon>0,\exists\delta>0,||x-x_0||<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

نميز حالتين:

أ) $x=x_0$ في هذه الحالة يكون $|f(x)-f(x_0)|=0<\varepsilon$

ب) $x\neq x_0$ في هذه الحالة مباشرةً $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ حيث $||x-x_0||<\delta$

نتيجة: إذا كانت x_0 نقطة حدية لـ S و الدالة f مستمرة عندها فإن:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) = f(x_0)$$

انتبه: لا نستطيع استخدام المبرهنة السابقة إلا إذا كانت النقطة حدية و تنتمي لساحة التعريف.

مبرهنة:

لتكن $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ولتكن $x_0 \in S$ بحيث x_0 غير حدية لـ S أي $x_0 \in S\backslash S'$ (أي x_0 منعزلة)

عندئذٍ تكون الدالة f مستمرة عند x_0.

الإثبات: نفرض جدلاً أن f غير مستمرة عند x_0 أي:

$$\exists\, \varepsilon > 0, \forall \delta > 0: \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$$

نميز حالتين: أ) $x = x_0$ ، $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ و هذا يناقض كون $\varepsilon > 0$.

ب) $x \neq x_0$ و بالتالي يكون أي جوار لـx_0 يتقاطع مع S بنقاط مختلفة عن x_0

$\Leftarrow x_0$ نقطة حدية وهذا يناقض الفرض بأنها غير حدية

أي أن f مستمرة عند x_0.

مبرهنة:

لتكن $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ مستمرة في x_0.

و $g: T \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ مستمرة في x_0.

حيث $x_0 \in S \cap T$ عندئذ:

$$1)\ f + g: S \cap T \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

تكون مستمرة في x_0.

$$2)\ f\,.\,g: S \cap T \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

تكون مستمرة في x_0

$$3)\ \frac{f}{g}: S \cap T\backslash\{x: g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$$

تكون مستمرة في x_0

٤) تركيب دوال مستمرة هو دالة مستمرة أي:

$$S \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow[\text{مستمرة في } x_0]{f} \mathbb{R} \xrightarrow[\text{مستمرة في } f(x_0)]{g} \mathbb{R}$$

عندئذٍ $h = fog : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة.

مثال: لتكن

$$f:\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\to\mathbb{R}\qquad :(x,y)\mapsto\frac{\sin xy}{x^2+y^2}$$

ولتكن

$$h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\qquad , \qquad (x,y)\mapsto xy$$

دالة مستمرة على $\mathbb{R}^2$.

عندها:

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\qquad : \qquad z\mapsto\sin z$$

هي دالة مستمرة على $\mathbb{R}$.

عندئذٍ التركيب :

$$g\circ h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
$$(x,y)\mapsto g\big(h(x,y)\big)=g(x.y)=\sin xy$$

دالة مستمرة على $\mathbb{R}^2$.

و أيضاً يكون :

$$f:\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\to\mathbb{R}\qquad :(x,y)\mapsto\frac{\sin xy}{x^2+y^2}=\frac{(g\circ h)_{(x,y)}}{x^2+y^2}$$

هي دالة مستمرة على $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

مبرهنة القيمة الوسطى:

لتكن $f:S\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة على S و S مجموعة مترابطة، ولتكن $\alpha\in\mathbb{R},x,y\in S$ حيث $f(x)<\alpha<f(y)$

عندئذ: $\exists\beta\in S\,,f(\beta)=\alpha$

انتهت المحاضرة

إعداد: منى شغل – سندس العص – نذير تيناوي