◄ دكتورة المادة: ريما الحاج خليفة

◄ المحاضرة: الرابعة

عنوان المحاضرة: تمارين

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- تمرين عن الحلقة الجزئية.

٢- تمارين عن الحلقة التامة.

تمرين : لتكن الحلقة $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}),+,.)$ حيث $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})=\left[\begin{matrix} a & b \\ 0 & c \end{matrix} \quad : \quad a,b,c\in\mathbb{Z}\right]$ ولتكن المجموعتان :

$$S=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a,b\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$T=\left\{\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : b,c\in\mathbb{Z}\right\}$$

والمطلوب : برهن أن كلاً من $(S,+,.),(T,+,.)$ حلقة جزئية من الحلقة $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}),+,.)$

الحل : نعلم أنه لكي تكون المجموعة S حلقة جزئية هو أن يتحقق الشرطان :

$$\forall A,B\in S\,;A-B\in S$$

$$\forall A,B\in S\,;A.B\in S$$

نلاحظ أن $S\neq\emptyset$ لأنه يوجد عنصر واحد على الأقل وليكن $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\in S$ ومن ناحية أخرى نلاحظ أن $S\subseteq\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$

$$\forall A,B\in S \quad : \quad A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},B=\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad : a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{Z}$$

١- $A-b=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\in S$

اذاً الشرط الاول محقق .

٢- $A.B=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\in S$

اذاً الشرط الثاني محقق .

وبالتالي $(S,+,.)$ تشكل حلقة جزئية من $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$

وبنفس الطريقة نلاحظ أن $\emptyset\neq T\subseteq\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ لأن $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\in T$

$$\forall C,D\in T \quad : \quad C=\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix},D=\begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \quad : c_1,c_2,b_1,b_2\in\mathbb{Z}$$

١- $C - D = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_1 - b_2 \\ 0 & c_1 - c_2 \end{bmatrix} \in T$

اذاً الشرط الاول محقق .

٢- $C.D = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_1 c_2 \\ 0 & c_1 c_2 \end{bmatrix} \in T$

اذاً الشرط الثاني محقق .

وبالتالي $(T, +, .)$ تشكل حلقة جزئية من $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$

تمرين : لنعرف على مجموع أزواج الاعداد الصحيحة $\mathbb{Z}^2$ العمليتين $(+), (\times)$ الداخليتين بالشكل التالي :

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1)$$
$$(x, y) \times (x_1, y_1) = (xx_1, yy_1 + xy_1 + yx_1)$$

المطلوب :

١- أثبت أن $(\mathbb{Z}^2, +, \times)$ حلقة .

٢- أثبت أن $(\mathbb{Z}^2, +, \times)$ حلقة تامة .

الحل :

حل الطلب الأول : (سنطبق شروط الحلقة)

$$\forall x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$$

١- $(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1) = (x_1 + x, y_1 + y) = (x_1, y_1) + (x, y)$

اذاً الشرط الأول محقق بأنها تبديلية على عملية الجمع .

٢- $[(x, y) + (x_1, y_1)] + (x_2, y_2) = [(x + x_1, y + y_1)] + (x_2, y_2) =$
$[(x + x_1) + x_2, (y + y_1) + y_2 = [x + (x_1 + x_2), y + (y_1 + y_2)] =$
$(x, y) + [(x_1 + x_2), (y_1 + y_2)] = (x, y) + [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)]$

اذاً الشرط الثاني محقق بأنها تجميعية .

٣- العنصر $(0,0)$ محايد بالنسبة لعملية الجمع .

$$(x, y) + (0,0) = (x + 0, y + 0) = (0 + x, 0 + y) = (0,0) + (x, y) = (x, y)$$

اذاً $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ هو عنصر محايد بالنسبة للجمع .

٤- لكل عنصر نظير بالنسبة لِـ $\mathbb{Z}^2$ إذا كان $x, y \in \mathbb{Z}$ فإن لها نظير $(-x, -y)$

$$(x, y) + (-x, -y) = (-x, -y) + (x, y) = (0,0)$$

اذاً لكل عنصر نظير وبالتالي $(\mathbb{Z}^2, +)$ تشكل زمرة تبديلية .

٥-

$[(x, y) \times (x_1, y_1)] \times (x_2, y_2) = [(xx_1, yy_1 + xy_1 + yx_1)] \times (x_2, y_2) =$
$[(xx_1)x_2, (yy_1 + xy_1 + yx_1)y_2 + (xx_1)y_2 + (yy_1 + xy_1 + yx_1)x_2] \ (1)$

ومن جهة ثانية :

$$(x,y)\times[(x_1,y_1)\times(x_2,y_2)]=(x,y)\times[x_1x_2,y_1y_2+x_1y_2+y_1x_2]=$$
$$[x(x_1x_2),y(y_1y_2+x_1y_2+y_1x_2)+x(y_1y_2+x_1y_2+y_1x_2)+y(x_1x_2)]\ (2)$$

بمقارنة (١) مع (٢) نجد أنه يتحقق شرط التجميعية الضربية **(١ و ٢ متساويان نوزع ما بداخلهما ونقارن الحدود)** وبالتالي فأن $(\mathbb{Z}^2,\times)$ شبه زمرة .

٦- بقي الشرط الأخير الضرب توزيعي على الجمع (من اليمين واليسار).

$$(x,y)\times[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)]=(x,y)\times[(x_1+x_2),(y_1+y_2)]=$$
$$[x(x_1+x_2),y(y_1+y_2)+x(y_1+y_2)+y(x_1+x_2)]=$$
$$(xx_1+xx_2,yy_1+yy_2+xy_1+xy_2+yx_1+yx_2)=$$
$$(xx_1,yy_1+xy_1+yx_1)+(xx_2,yy_2+xy_2+yx_2)$$

من اليمين بشكل مشابه.

فيكون الشرط الأخير محقق بأن الضرب توزيعي على الجمع ومنه فإن $(\mathbb{Z}^2,+,\times)$ حلقة .

حل الطلب الثاني (وظيفة) :

حسب التعريف : حتى تكون تامة يجب أن يتحقق ما يلي

- **لنثبت أن الحلقة واحدية اولاً**

اي لنوجد :

$$(x,y)\times(x_1,y_1)=(x_1,y_1)\times(x,y)=(x,y)$$

وليكن $x_1y_1\in\mathbb{Z}:\ x_1=1,\quad y_1=0$

$$(x,y)\times(1{,}0)=(x,y0+x0+y1)=(x,y)$$
$$(1{,}0)\times(x,y)=(1x,0y+1y+0x)=(x,y)$$

اي أن $(1,0)$ هو واحد الحلقة $\mathbb{Z}^2$ وبالتالي فهي واحدية .

- **لنثبت أنها لا تحوي قواسم الصفر**

ليكن $(x,y)\times(x_1,y_1)=(0,0)$

بحيث $(x,y),(x_1,y_1)$ بحيث يكون كل منهما مغاير للصفر ونعلم أن

$$(x,y)\times(x_1,y_1)=(xx_1,yy_1+xy_1+yx_1)$$

ولنأخذ المسقط الأول $xx_1=0$ لا يمكن أن يتحقق ذلك الا اذا كان x,x_1 أحدهما على الأقل مساوياً للصفر
وبالتالي $\mathbb{Z}^2$ لا تحوي قواسم الصفر ومنه فهي تامة .

تمرين :

لتكن لدينا $\mathbb{Z}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}:a,b\in\mathbb{Z}\}$

هل تشكل المجموعة $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$ حلقة وهل هي تامة أم لا ؟

الحل :

بما أن $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$ مجموعة جزئية في $\mathbb{Z}$ فإنه يوجد فيها عنصر حيادي من الشكل $0+0\sqrt{2}=0$ وبالتالي
$\emptyset \neq \mathbb{Z}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Z}$

لنطبق شروط الحلقة : $\forall x,y,t \in \mathbb{Z}$: $\boldsymbol{t=a_3+b_3\sqrt{2}\,,x=a_1+b_1\sqrt{2}\,,y=a_2+b_2\sqrt{2}}$

١- $x+y=(a_1+b_1\sqrt{2})+(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2}=$
$(a_2+a_1)+(b_2+b_1)\sqrt{2}=(a_2+b_2\sqrt{2})+(a_1+b_1\sqrt{2})=y+x$

اذاً المجموعة $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$ تبديلية بالنسبة للجمع.

باقي الشروط وظيفة (اليكم حلها)

٢- لنتحقق من الشرط الثاني

$$
\begin{aligned}
&[(a_1+b_1\sqrt{2})+(a_2+b_2\sqrt{2})]+(a_3+b_3\sqrt{2})\\
&=[(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2}]+(a_3+b_3\sqrt{2})\\
&=[a_1+(a_2+a_3)]+[[b_1+(b_2+b_3)]\sqrt{2}]\\
&=(a_1+b_1\sqrt{2})+[(a_2+a_3)+(b_2\sqrt{2}+b_3\sqrt{2})]\\
&=(a_1+b_1\sqrt{2})+[(a_2+b_2\sqrt{2})+(a_3+b_3\sqrt{2})]
\end{aligned}
$$

اذاً المجموعة $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$ تجميعية .

العنصر $0+0\sqrt{2}=0$ هو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع .

٣- $(a+b\sqrt{2})+0=0+(a+b\sqrt{2})=a+b\sqrt{2}$

أي يوجد في المجموعة $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$ عنصر محايد وهو الصفر .

٤- لكل عنصر نظير (معكوس).

$$(a+b\sqrt{2})+(-a-b\sqrt{2})=-a-b\sqrt{2}+(a+b\sqrt{2})=0$$

اذاً الشرط محقق ومنه لكل عنصر نظير وبالتالي نجد أن $(\mathbb{Z}(\sqrt{2}),+)$ زمرة تبديلية .

٥- لنتحقق من شرط التجميعية بالنسبة لعملية الضرب .

$$
\begin{aligned}
&[(a_1+b_1\sqrt{2}).(a_2+b_2\sqrt{2})].(a_3+b_3\sqrt{2})\\
&=[a_1.a_2+b_1.b_2 2+a_1.b_2\sqrt{2}+a_2.b_1\sqrt{2}].(a_3+.b_3\sqrt{2})\\
&=[a_1.(a_2.a_3)+b_1\sqrt{2}(.b_2.a_3\sqrt{2})+a_1(.b_2.a_3\sqrt{2})+b_1.(a_2.a_3\sqrt{2})\\
&\quad+a_1.(a_2.b_3\sqrt{2})+b_1\sqrt{2}.(b_2.b_3 2)+a_1(.b_2.b_3 2)+b_1\sqrt{2}.a_2.b_3\sqrt{2}]\\
&=(a_1+b_1\sqrt{2}).[(a_2.a_3)+b_2.a_3\sqrt{2}+a_2.b_3\sqrt{2}+b_2.b_3 2]\\
&=(a_1+b_1\sqrt{2}).[(a_2+b_2\sqrt{2}).(a_3+b_3\sqrt{2})]
\end{aligned}
$$

اذاً $(\mathbb{Z}(\sqrt{2}),.)$ شبه زمرة .

٦- **بقي الشرط الأخير الضرب توزيعي على الجمع (من اليمين واليسار).**

سنثبت من اليسار واليمين بطريقة مشابهة يكون :

$$
\begin{aligned}
&(a_1+b_1\sqrt{2}).[(a_2+b_2\sqrt{2})+(a_3+b_3\sqrt{2})]\\
&=(a_1+b_1\sqrt{2}).[(a_2+a_3)+(b_2+b_3)\sqrt{2}]
\end{aligned}
$$

$$=a_1.(a_2+a_3)+a_1.(b_2+b_3)\sqrt{2}+(a_2+a_3)b_1\sqrt{2}+(b_2+b_3)b_1\sqrt{2}\sqrt{2}$$

ننشر ثم نجمع الحدود فينتج لدينا ما يلي

$$= (a_1 + b_1\sqrt{2}).(a_2 + b_2\sqrt{2}) + (a_1 + b_1\sqrt{2}).(a_3 + b_3\sqrt{2})$$

ومنه $\mathbb{Z}(\sqrt{2}\,)$ حلقة .

سنثبت انها حلقة واحدية :

اي لنوجد :

$$(a + b\sqrt{2}).e = e.(a + b\sqrt{2}) = (a + b\sqrt{2})$$

وليكن $e = 1 + 0\sqrt{2}$

$$(a + b\sqrt{2}).(1 + 0\sqrt{2}) = (a + b\sqrt{2})$$
$$(1 + 0\sqrt{2}).(a + b\sqrt{2}) = (a + b\sqrt{2})$$

اي أن $e = 1 + 0\sqrt{2}$ هو واحد الحلقة $\mathbb{Z}(\sqrt{2}\,)$ وبالتالي فهي واحدية .

لنرى الأن هل هي تحوي قواسم الصفر ام لا

لنفرض أن : $x.y = 0$ أي :

$$(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2}) = 0$$

و لنفرض أن $y \neq 0$ ولكن المساواة لن تتحقق الا اذا كان $x = 0$ وبالتالي فهي لا تحوي قواسم الصفر.

اي أن الحلقة تامة .

انتهت المحاضرة

إعداد: لبنى الطون – محمد فهمي القاضي – أحمد ابو التوت