تذكرة في الجبر خطي ١

مزيد سيريا مات   محمد أنس القزاز

١- الفضاء المولد بمجموعة:

لتكن $V=\mathbb{R}^2$ فضاء شعاعي معرف على الحقل $F=\mathbb{R}$ ، أثبت أن المجموعة $S=\{V_1=(1,1) , V_2=(1,2)\}$ مولدة للفضاء V

الحل:

ليكن $V=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ولنثبت أنه يوجد $\lambda_1 , \lambda_2 \in \mathbb{R}$ بحيث:

$$V=\lambda_1 V_1+\lambda_2 V_2$$

$$(x,y)=\lambda_1(1,1)+\lambda_2(1,2) \Rightarrow (x,y)=(\lambda_1,\lambda_1)+(\lambda_2,2\lambda_2)$$

$$(x,y)=(\lambda_1+\lambda_2 , \lambda_1+2\lambda_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\lambda_1+\lambda_2 \\ y=\lambda_1+2\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y-x=\lambda_2 \\ 2x-y=\lambda_1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \exists\, \lambda_1=(2x-y)\in\mathbb{R} , \lambda_2=(y-x)\in\mathbb{R}$$

$$: V=\lambda_1 V_1+\lambda_2 V_2$$

$$\Rightarrow V=\mathrm{Span}(S)$$

2- الاستقلال الخطي

ليكن $V = \mathbb{R}^3$ المعرفة على حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، بين أن المجموعة S مستقلة خطيا
$S = \{V_1 = (0,1,1) , V_2 = (1,0,1) , V_3 = (1,1,0)\}$

الحل :

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 = 0$$

$$\lambda_1 (0,1,1) + \lambda_2 (1,0,1) + \lambda_3 (1,1,0) = (0,0,0)$$

$$(0, \lambda_1, \lambda_1) + (\lambda_2, 0, \lambda_2) + (\lambda_3, \lambda_3, 0) = (0,0,0)$$

$$(\lambda_2 + \lambda_3 , \lambda_1 + \lambda_3 , \lambda_1 + \lambda_2) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$\Leftarrow$ S مستقلة خطيا

3- قاعدة فضاء شعاعي

ليكن V فضاءً شعاعياً معرفاً على الحقل F ولتكن $S = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ مجموعة جزئية من V عندئذ نقول عن المجموعة S إنها قاعدة الفضاء V إذا :

1- الفضاء الشعاعي V مولد بالمجموعة S $V = span(S)$

2- المجموعة S مستقلة خطيا

أو إذا :

1- المجموعة S مستقلة خطيا

2- المجموعة S منتهية وعدد عناصرها يساوي بعد الفضاء V إي أن $\dim V = \#S$

$\#S$: عدد عناصر المجموعة

لتكن المجموعة

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 2x + y - 3z = 0 , 2z - x = 0 , x + y - z = 0\}$$

أوجد قاعدة W ثم بعده :

الحل :

نوجد مجموعة مولدة للفضاء W ثم نبين أنها مستقلة خطياً وبالتالي تكون قاعدة

$\forall v (x, y, z) \in W ;$

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 0 \\ 2z - x &= 0 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 2z \\ y &= -z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall v \in W ; v = (2z , -z , z) ; z \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow v = z(2, -1, 1) ; z \in \mathbb{R}$$

ومنه نستنتج :

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 2x + y - 3z = 0 , 2z - x = 0 , x + y - z = 0)$$

$$= \{ (2z , -z , z) ; z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{ z(2, -1, 1) ; z \in \mathbb{R}\} = \text{Span}(\{(2, -1, 1)\})$$

إذاً الفضاء W مولد بالمجموعة $S = \{(2, -1, 1)\}$

وهي مستقلة خطياً لأنها مؤلفة من عنصر وحيد غير صفري

$\Leftarrow S$ قاعدة للفضاء W

$$\dim W = 1$$

لأن S تحتوي عنصراً وحيداً