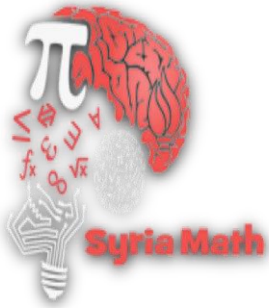

◄ دكتور المادة: هدى الشماط

◄المحاضرة التاسعة عنوان المحاضرة :تعميم قابلية الاشتقاق و فريشيه

نظري

المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-تعميم قابلية الاشتقاق لتوابع لعدة متحولات

٢-تعميم تفاضل فريشيه

٣-مبرهنة توضح خاصة مميزة للتوابع القابلة للاشتقاق

٤-مبرهنة تربط بين الاستمرار و قابلية الاشتقاق

٥-تمارين

درسنا في المحاضرة السابقة قابلية الاشتقاق و تفاضل فريشيه لتوابع لمتحولين اثنين و في هذه المحاضرة سنعمم هذه المفاهيم على التوابع التي تتبع **n** متحولاً .

تعميم قابلية الاشتقاق :

لتكن

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

ولتكن $c \in D^{\circ}$ فإذا كانت $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ بحيث $||h|| < \delta$

فهنالك $A = (A_1, A_2, \dots . A_n) \in \mathbb{R}^n$ تحقق أن :

$$f(c+h) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \mu(h)\|h\|$$

بحيث $\lim_{||h||\to 0} \mu(h) = 0$ عندئذٍ نقول أن الدالة قابلة للاشتقاق في النقطة c.

لنوجد قيم A في العلاقة السابقة و التي تكتب بشكل مفصل كما يلي :

$$f(c+h) - f(c) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \cdots \dots . + A_n h_n + \mu\|h\|$$

بحيث $\lim_{||h||\to 0} \mu = 0$

لتعيين قيمة A_1 نفرض أن $h_1 \neq 0$ وإن $h_2 = h_3 = \cdots = h_n = 0$ ومنه نجد أن

Syria Math Team

$$f(c_1+h_1,c_2,\dots\dots,c_n)-f(c_1,c_2,\dots\dots c_n)=A_1h_1+\mu\sqrt{h_1^2}$$
$$\Longrightarrow f(c_1+h_1,c_2,\dots\dots,c_n)-f(c_1,c_2,\dots\dots c_n)=A_1h_1\pm\mu h_1$$

$$\Longrightarrow\frac{f(c_1+h_1,c_2,\dots\dots,c_n)-f(c_1,c_2,\dots\dots c_n)}{h_1}=A_1\pm\mu$$

بأخذ نهاية الطرفين عندما $h_1\to 0$

$$\lim_{h_1\to0}\frac{f(c_1+h_1,c_2,\dots\dots,c_n)-f(c_1,c_2,\dots\dots c_n)}{h_1}=A_1\pm\lim_{h_1\to0}\mu=A_1+0$$

أي أن

$$A_1=\frac{\partial f}{\partial x_1}(c)=f_{x_1}(c)$$

بنفس الطريقة $A_2=f_{x_2}(c)$ ... $A_n=f_{x_n}(c)$ ومنه أصبحت عبارة الاشتقاق :

$$f(c+h)-f(c)=\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)+\mu||h||$$

بشرط $\lim_{||h||\to0}\mu=0$

تعميم مشتق فريشيه:

لتكن $d_cf:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$$h=(h_1,h_2,\dots,h_n)\mapsto d_cf(h)=h\,f_{x_1}(c)+h_2f(c)\dots+h_nf_{x_n}(c)$$

أي أن:

$$d_cf(h)=\sum_{i=1}^{n}h_i.f_{x_i}(c)$$

ندعو الدالة الخطية هذه بمشتق فريشية في النقطة c

ولكي تنسجم الرموز القديمة مع الرموز الجديدة ،سنعرف الدالة

$$dx_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$
$$h\mapsto dx_i(h)=h_i$$
$$x\longmapsto dx_i(x)=x_i$$

نبدل في صيغة فريشيه فيكون :

Syria Math Team

$$\Rightarrow \boxed{d_c f(h) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(c)\ dx_i(h)}$$

و نخلص إلى :

$$d_c \boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(c)\ dx_i$$

مثال:

أوجد $d_c f(X-c)$ حيث: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$X = (x,y,z) \mapsto e^{-(x+y+z)}$$

, $c(0,0,0)$

الحل: نلاحظ أن :

$$X - c = (x,y,z) - (0,0,0) = (x,y,z)$$

نوجد قيم المشتقات الجزئية عند c

$$f_x(x,y,z) = -e^{-(x+y+z)}, f_y(x,y,z) = -e^{-(x+y+z)}, f_z(x,y,z) = -e^{-(x+y+z)}$$

$$f_x(0,0,0) = f_y(0,0,0) = f_z(0,0,0) = -1$$

نعوض في صيغة فريشيه

ومنه: $\boxed{d_c f(X-c) = d_c f(x,y,z) = -x-y-z}$

مبرهنة:

إذا كانت $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق في النقطة c فهناك عددان موجبان δ, k يحققان الشرط:

$||x-c|| < \delta$ فإن: $|f(x) - f(c)| < k$

البرهان:

بما أن f قابلة للاشتقاق في النقطة $c = (c_1, c_2 \dots, c_n)$ فيوجد $\delta_1 > 0$ بحيث إذا كان $||h|| < \delta_1$ فهنالك $A = (A_1, A_2, \dots . A_n) \in \mathbb{R}^n$

وتحقق

$$f(c+h) - f(c) =: A_1 h_1 + : A_2 h_2 \dots . + A_n h_n + \mu ||h||$$

بشرط:

$$\lim_{||h|| \to 0} \mu = 0$$

Syria Math Team

الآن لنبدأ من المقدار $|f(c+h)-f(c)|$

$$|f(c+h)-f(c)|=\left|\sum_{i=1}^{n}A_ih_i+\mu\,||h||\right|$$

$$\underset{|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|}{\le}\left|\sum_{i=1}^{n}A_ih_i\right|+|\mu|\,||h||\underset{|\sum c_n|\le\sum|c_n|}{\le}\sum_{i=1}^{n}|A_i||h_i|+|\mu|\,||h||$$

مع الانتباه أن : $h_i\le\sqrt{h_1^2+h_2^2\dots h_n^2}$ لكل $1\le i\le n$

$$\Rightarrow|f(c+h)-f(c)|\le\sum_{i=1}^{n}|A_i|||h||+|\mu|\,||h||\le\left(\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\mu\right)||h||$$

لكن الدالة قابلة للاشتقاق أي أن $\lim_{||h||\to0}\mu=0$

و بالتالي حسب تعريف النهاية : ومن أجل أي عدد $\varepsilon>0$ (سنختار $\varepsilon=1$) يوجد δ_2

$$0<||h-0||<\delta_2\Rightarrow|\mu|<\varepsilon=1$$

وبالتالي

$$\Rightarrow|f(c+h)-f(c)|<\left(\sum_{i=1}^{n}|A_i|+1\right)||h||\dots(*)$$

لنسمي كل c+h بـ x و لنضع $\sum_{i=1}^{n}|A_i|+1=k>0$ عندئذٍ تصبح العلاقة (*) :

$$|f(x)-f(c)|<k||x-c||$$

أي يوجد $k>0$ و يوجد $0<\delta=\min(\delta_2,\delta_1)$ بحيث عندما يكون

$||h||=||x-c||<\delta$ فإن :

$$|f(x)-f(c)|<k||x-c||$$

وهو المطلوب

مبرهنة:

إذا كانت $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ و لتكن $c\in D^\circ$ فإذا كانت f قابلة للاشتقاق عند c فإن f مستمرة في c

البرهان:

بما أن f قابلة للاشتقاق في c فحسب المبرهنة السابقة يوجد عددان $\delta>0$ و $k>0$ بحيث إذا تحقق $||x-c||<\delta$ فإن: $|f(x)-f(c)|<k||x-c||$

وبالتالي من أجل أي $\varepsilon>0$ يوجد $0<\delta=\frac{\varepsilon}{k}$ بحيث

$$||x-c||<\delta\Rightarrow|f(x)-f(c)|<k||x-c||<k\delta$$

Syria Math Team

$$\Rightarrow |f(x)-f(c)| < k\delta = \frac{\varepsilon}{k}k = \varepsilon$$

أي f مستمرة.

ملاحظة :

f قابلة للاشتقاق $\Longleftarrow$ f مستمرة

f غير مستمرة $\Longleftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق

مثال: لتكن $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & ;(x,y)=(0,0)\\ \dfrac{x}{y} & ;(x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

أثبت أن f غير قابلة للاشتقاق في $(0,0)$.

الحل: ملاحظة : لإثبات أنها غير قابلة للاشتقاق يكفي أن نثبت أنها غير مستمرة :

و لأجل ذلك يوجد طريقتان

الطريقة الأول (من النهاية): لنحسب النهاية عندما $x=y$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{y}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1\neq f(0,0)=0$$

f غير قابلة للاشتقاق حيث $(0,0)$ نقطة حدية .

الطريقة الثانية (من التعريف):

حتى تكون مستمرة عند المبدأ يجب أن يتحقق أن

$$\forall\,\varepsilon>0\ ,\ \exists\delta>0\ ,\ ||(x,y)-(0,0)||<\delta \Rightarrow \left|\frac{x}{y}-0\right|<\varepsilon$$

$$\downarrow$$

$$|f(x,y)-f(0,0)|$$

لنأخذ $x=y=\frac{\delta}{2}$ و $\varepsilon=\frac{1}{2}$ عندها:

$$||(x,y)-(0,0)|| = ||(x,y)|| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{\delta^2}{4}+\frac{\delta^2}{4}} = \frac{\delta}{\sqrt{2}} < \delta$$

إلا أن :

Syria Math Team

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\frac{\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}}-0\right|=1\not<\varepsilon=\frac{1}{2}$$

فالدالة المعطاة ليست مستمرة عند المبدأ و بالتالي لن تكون قابلة للاشتقاق عند المبدأ

مثال : لنأخذ الدالة :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin(x^2y^2)}{(e^{x^2}-1)(e^y-1)} & :(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & :(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

أثبت أن f قابلة للاشتقاق عند النقطة $c(0,0)$ ثم أوجد مشتق فريشيه $d_{c(0,0)}(h,k)$

الحل : لنأخذ تعريف الاشتقاق :

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=hf_x(a,b)+kf_y(a,b)+\mu(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

حيث هنا $(a,b)=(0,0)$ و لكي تكون قابلة للاشتقاق يجب التأكد من أن $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\mu=0$

و نلاحظ أن :

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=f(h,k)-f(0,0)=\frac{h\sin(h^2k^2)}{(e^{h^2}-1)(e^k-1)}$$

$$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$$

و بالتالي ، نعوض :

$$\frac{h\sin(h^2k^2)}{(e^{h^2}-1)(e^k-1)}=0+0+\mu\sqrt{h^2+k^2}$$

$$\Rightarrow\mu(h,k)=\frac{h\sin(h^2k^2)}{(e^{h^2}-1)(e^k-1)\sqrt{h^2+k^2}}$$

سنضرب و نقسم على h^2k^2:

Syria Math Team

$$\mu(h,k)=\frac{h\,.\,h^2k^2}{\left(e^{h^2}-1\right)(e^k-1)\sqrt{h^2+k^2}}\frac{\sin(h^2k^2)}{h^2k^2}$$

$$\Longrightarrow \mu(h,k)=\frac{h^2}{\left(e^{h^2}-1\right)}\cdot\frac{k}{(e^k-1)}\frac{\sin(h^2k^2)}{h^2k^2}\cdot\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

و لكن $1.1.1=1=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2}{\left(e^{h^2}-1\right)}\cdot\frac{k}{(e^k-1)}\frac{\sin(h^2k^2)}{h^2k^2}$ (نهايات شهيرة) و بقي لكي يتحقق أن $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\mu=0$ هو أن نثبت أن $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$ أي :

$$\left|\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}-0\right|=\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}\leq\frac{2hk}{\sqrt{h^2+k^2}}\leq\frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}=\sqrt{h^2+k^2}<\delta=\varepsilon$$

أي أنه :

$$\forall\varepsilon>0\,;\exists\delta=\varepsilon:\left||(h,k)\right||<\delta\Rightarrow|\mu-0|<\varepsilon$$

و هذا يبين أن $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\mu=0$ و بالتالي f قابلة للاشتقاق عند المبدأ

و مشتق فريشيه المطلوب :

$$d_{(0,0)}f(h,k)=f_x(0,0)h+f_y(0,0)k=0\,h+0\,k=0$$

انتهت المحاضرة

صفحتنا على فيسبوك: IOM الرابط : facebook.com/MathemagicTeam/	مجموعة السنة الثانية : Improve Our Mathematics	مجموعة السنة الأولى: طلاب كلية العلوم قسم الرياضيات في جامعة دمشق ٢٠١٧

إعداد: منى شغل – سندس العص – نذير تيناوي