المحاضرة الأولى : 2017/3/5

- مقدمة : سندرس في هذا الفصل المفاهيم التالية :
الحلقة Ring ، الجبر Algebra ، الحلقة التامة σ Ring ، الجبر التام σ-Algebra ، المجموعات البوريلية Borel sets .

- ملاحظات تتعلق بالمجموعات المعدودة :

1- إنّ أيّ مجموعة جزئية غير ~~[illegible]~~ منتهية من مجموعة معدودة هي تكون معدودة.

2- مجموعة الأعداد العاديّة الموجبة تماماً $\mathbb{Q}^+$ معدودة.

3- الاجتماع المعدود لمجموعات معدودة هو مجموعة معدودة.

4- مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي مجموعة غير منتهية وغير قابلة للعدّ.

- من أجل المجموعة $\Omega \neq \phi$ هل $(P(\Omega), \cup, \cap)$ حلقة؟
لاحظ أنّ من أجل $(P(\Omega), \cup)$ نلاحظ ما يلي :

1- $A \cup B = B \cup A$

2- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3- الحيادي موجود هو $\phi$ : $A \cup \phi = \phi \cup A = A$

4- هل لكل عنصر نظير ؟

لنأخذ $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ، $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ولنأخذ $A = \{1, 2, 3\}$ نلاحظ لا يوجد نظير لـ A.

$$A \cup A' \neq \phi$$

إذاً ليس لكل عنصر نظير ⇐ $(P(\Omega), \cup)$
ليست زمرة

هل $(P(\Omega), \cap)$ زمرة؟

1- لاحظ أنّ $A \cap B = B \cap A$

2- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3- الحيادي موجود وهو $\Omega$ : $A \cap \Omega = A$

4- ليس لكل عنصر نظير.

ومنه $(P(\Omega), \cap)$ ليست زمرة.

ندرس الآن $(P(\Omega), \Delta)$ :

1- $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = B \Delta A$

2- الحيادي موجود وهو $\phi$ حيث أنّ:

$A \Delta \phi = \phi \Delta A = A$

3- $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

4- لكل عنصر نظير وهو العنصر نفسه :

$A \Delta A = \phi$

و $P(\Omega)$ مغلقة بالنسبة لـ $\Delta$

إذاً $(P(\Omega), \Delta)$ زمرة تبديلية.

- إنّ $(P(\Omega), \Delta, \cap)$ حلقة :

وجدنا أنّ $(P(\Omega), \Delta)$ زمرة تبديلية.

و $(P(\Omega), \cap)$ شبه زمرة

و $\cap$ توزيعي على $\Delta$ :

$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (B \cap C)$

SADBAGH STATIONERY

لتكن $\phi \neq \mathcal{T} \subseteq P(\Omega)$ :

إنّ $(\mathcal{T}, \Delta, \cap)$ حلقة جزئية من $(P(\Omega), \Delta, \cap)$ إذا وفقط إذا:

كانت $\mathcal{T}$ مغلقة بالنسبة للعمليتين الجبريتين $\Delta$ ، $\cap$.

وهذا يكافئ كون $\mathcal{T}$ مغلقة بالنسبة لـ $-$ و $\cup$.

- تمرين: لتكن $\phi \neq \Omega = \mathbb{R}$

ولنأخذ $\phi \neq \mathcal{T} \subseteq P(\Omega)$

$\mathcal{T} = \{\phi, \{1, 2\}, \{2\}\}$

نلاحظ أنّ $\mathcal{T}$ ليست مغلقة بالنسبة للفرق التناظري

$\{1, 2\} \Delta \{2\} = \{1\} \notin \mathcal{T}$

تمرين: بيّن صحة ما يلي:

لتكن $\Omega \neq \phi$ ولتكن $P(\Omega) = \{A : A \subseteq \Omega\}$ ولتكن $\phi \neq \mathcal{T} \subseteq P(\Omega)$ و $\phi \neq \mathcal{T}$ عندئذٍ:

$$(\mathcal{T}, \Delta, \cap) \text{ is subring } \overset{?}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1- A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{T} \\ 2- A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A - B \in \mathcal{T} \end{cases}$$

- الحل: بما أنّ $(\mathcal{T}, \Delta, \cap)$ حلقة جزئية إذاً مغلقة بالنسبة لـ $\Delta$ و $\cap$:

نعلم أنّ $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

$A \Delta (A \cap B) = A - B \Rightarrow$ مغلقة بالنسبة لعملية الفرق

مغلقة بالنسبة لعملية الاجتماع : $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$

بعض الملاحظات :

- إن $\mathbb{Q}^* = \{q : q > 0\}$ مجموعة عدودة

"مجموعة جزئية من مجموعة عدودة فهي عدودة"

- لنفرض $A_1, A_2, \dots$ جماعة من المجموعات المنتهية عند عد : اجتماعها سيكون مجموعة عدودة

* تمرين جانبي : "لاحظ أن مجموعة قواسم عدد هي مجموعة منتهية"

$D(91) = ?$ , $D((91)^2) = ?$

$D(91) = \{1, 7, 13, 91\}$

$D((91^2)) = \{1, 7, 13, 91, \dots\}$

إن $91 = 7 \times 13 \Rightarrow$ عدد قواسم 91 هو $(1+1)\times(1+1) = 4$

بينما $\Rightarrow 91^2 = 7^2 \times 13^2$ : عدد قواسم $91^2$ : $(2+1)\times(2+1) = 9$

* من أجل العدد $a = 2^4 . 3^5 . 5^2 . 7^1$ فإن عدد قواسمه $(4+1)(5+1)(2+1)(1+1)$

الحلقة والحلقة التامة من أجزاء مجموعة $\Omega$ :

تعريف الحلقة البولانية : نقول عن جماعة $\mathcal{R}$ من

أجزاء $\Omega$ إنها حلقة بوليانية أو حلقة من أجزاء $\Omega$ إذا تحقق ما يلي :

$1 - \phi \in \tau$

$2 - A, B \in \tau \Rightarrow A \cup B \in \tau, A \cap B \in \tau, A - B \in \tau$

ينتج من ذلك مباشرة أنه إذا كان $A, B \in \tau$ فإن :

$$A \Delta B = (A-B) \cup (B-A) \in \tau$$

* مبرهنة : إذا كانت $\tau$ جماعة من أجزاء $\Omega$ فإن الشرط اللازم و الكافي كي تحقق الشرطان :

$1 - \phi \in \tau$

$2 - A, B \in \tau \Rightarrow A \Delta B \in \tau, A \cap B \in \tau$

هو أنه تحقق الشرطان :

$\tau_1 - \phi \in \tau$

$\tau_2 - A, B \in \tau \Rightarrow A - B, A \cup B, A \cap B \in \tau$

انظر تدريب 1 ; page11 .

تعريف الحلقة التامة : نقول عن جماعة $\tau$ من أجزاء $\Omega$ إنها حلقة تامة أو $\sigma$ - حلقة إذا كانت $\tau$ حلقة أي تحقق :

1) $\phi \in \tau, \tau \neq \phi$

2) $A, B \in \tau \Rightarrow A - B, A \cup B, A \cap B \in \tau$

وحققت الشرط (1) ـ

3) $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \tau$

وسنرى أيضا أن " $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \tau$ "

تعريف الجبر : هو حلقة تنتمي إليها المجموعة الشاملة.

تعريف الجبر التام : هو جبر يحقق الخاصية 3.

- أمثلة عن الجبر التام : لتكن $\Omega \neq \emptyset$ عند ئذ يكون

$\mathcal{P}(\Omega)$ جبر تام و $\{\emptyset, \Omega\}$ جبر تام.

كذلك $\left\{ \begin{array}{l} A \subsetneq \Omega \subsetneq \mathbb{R} \\ A^c \subsetneq \Omega \subsetneq \mathbb{R} \end{array} \right.$ فإن $\{A, A^c, \emptyset, \Omega\}$ جبر تام

- بينما من أجل $\Omega = \{1, 2, 3\}$ فإن $\tau = \{\emptyset, \{1\}\}$

حلقة و $\tau$ ليست جبر لأنها لا تحوي $\Omega$

بينما $\tau_1$ هو جبر $\tau_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\}$

- ملاحظة : بما أن اجتماع مجالين ليس بالضرورة

مجال ، فإن المجالات من الشكل $[a, b[$ " ومنه

صنف المجالات المفتوحة وصنف المجالات المغلقة

ليست حلقة من أجزاء $\mathbb{R}$.

- أصغر حلقة تحوي صنف المجالات نسميها الحلقة

المولّدة بصنف المجالات.

- لاحظ أن $P(\Omega)$ حيث $\Omega = \mathbb{R}$ جبر تام يحوي صف المجالات.

انظر تسريب Page15.

انتهت المحاضرة.

المحاضرة الثانية : 2017/3/8

- الحلقة التامة (الحلقة السيغماوية) تتعامل مع المتتاليات اتحادها يبقى (وتقاطعها يبقى).

- عودة لكتاب احتمالات، أهم مثال على الجبر التام هو فضاء الاحتمال هو مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية. $P(\Omega)$.

تمارين : 1) هل صف المجموعات المنتهية في $\Omega = \mathbb{R}$ حلقة؟ هل هو جبر؟؟

لدينا $\Omega \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{لكن } \Omega = \{1,2,3,4\}}$

$C = \{A : |A| < \infty\}$ , $\phi \in C$

$|\phi| = 0 < \infty$

محققة $A, B \in C \Rightarrow A \cap B, A \cup B, A - B \in C$

بالتالي $C$ حلقة.

ولكنها ليست جبر وليست حلقة تامة ولا جبر تاماً.

2) هل صف المجموعات المحدودة في $\mathbb{R} = \Omega$ هو حلقة؟ هل هو جبر؟

لو أخذنا $\mathbb{R}$ مزودة بالتبولوجيا المألوفة فهي حلقة

وليست جبرا .

_ لو زودنا IR بالمسافة $d(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$

هنا IR محدودة ، وهي هنا جبر تام .

"لأن أي مجموعة محدودة انغلاقها محتوى في

المحدودة" هنا نعتمد على المسافة . IR

3) هل صف المجموعات المغلقة في $\Omega = IR$ هو حلقة ؟

هل هو جبر ؟

ليس حلقة لأن فرق مغلقتين ليس مغلقة .

فهو ليس جبرا .

4) هل $\{\emptyset, \Omega\}$ جبر من أجزاء $\Omega$ ؟ نعم .

5_ هل $P(\Omega)$ جبر من أجزاء $\Omega$ ، هل هو جبر-σ ؟

نعم هو جبر و σ-جبر

6_ هل تقاطع أسرة الجبور-σ هو جبر-σ

نعم ، وأيضا تقاطع حلقات هو حلقة .

7_ هل صف المجالات المفتوحة في IR هو

صف مطرد ؟ هل هو جبر ؟

هل هو جبر؟

لو أخذنا $A_n = ]-\frac{1}{n}, 1[$ فإن:

$A_1 = ]-1, 1[ , A_2 = ]-\frac{1}{2}, 1[ , A_3 = ]-\frac{1}{3}, 1[$

و $\bigcap_{n \geq 1} A_n = [0, 1[$

أي وجدنا متتالية متناقصة تقاطعها لا ينتمي إلى الصف المذكور وبالتالي الصف المذكور ليس صفاً مطرداً.

وهو ليس جبر ولا جبر تاماً.

- لو كان A جبر تاماً يحوي $\{[a, b[ , a \leq b , a, b \in \mathbb{R}\}$

نلاحظ أن:

$$[a, \infty[ = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, a+n[$$

إن المجال $[a, \infty[$ هو اتحاد عدود لمجالات تنتمي إلى الجبر المعطى بالتالي فإن اتحادها ينتمي إلى A.

- هل $[0, 1]$ ينتمي إلى A؟

$$[0, 1] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [0, 1 + \frac{1}{n}[ \in A$$

* إن أصغر جبر تام يحوي $C$ هو تقاطع كل الجبور التامة التي تحوي $C$ ونرمز له بـ $\hat{C}$ أو $\sigma(C)$

## جبر بوريل في $\mathbb{R}$ :

إن المجموعة $\{]a,b[\,, a\leq b\}$ ليس جبر لأنه
غير تام.

نسمي أصغر جبر تام يحوي المجموعة بـ جبر
بوريل في $(X,\tau)$.

وهو تقاطع جميع الجبور التامة والتي تحوي $\tau$
نرمز له بـ $\tilde{\tau} = \sigma(\tau)$

حل page 21 ص 21،

page 21 : $\boxed{3}$ $X=\{1,2,3,4,5,6\}$

$A\subseteq P(X)$ تبولوجيا.

كل جبر تام على $X$ هو تبولوجيا والعكس
غير صحيح بالضرورة.

مثال: $\tau=\{\phi, X, \{1\}\}$

$X-\{1\}=\{1\}^c \notin \tau$

والجبر مغلق بالنسبة للمتمم.

$\boxed{4}$ $\mathcal{C}=\{\{1,2\},\{3\}\}$ ليست حلقة

لأن $\phi\notin\tau$ لأنه ليست جبر أيضاً

أصغر حلقة: $\mathcal{C}'=\{\{1,2\},\{3\},\phi,\{1,2,3\}\}$

أصغر جبر نأخذ كل عناصر الحلقة مع
المتممات:

$\mathcal{C}''=\{A : A\in\mathcal{C}'\}\cup\{A^c : A\in\mathcal{C}'\}$

أصغر تبولوجيا :

$\tau^* = \{ \{1,2\}, \{3\}, \phi, \{1,2,3\}, X \}$

إذن $\tau^*$ ليس جبر

مثال $\boxed{5}$ : $X \neq \phi$ ، $\tau = \{\{a\}, a \in X\}$

ليست حلقة . $\phi \in \tau$

$\boxed{6}$ جميع العبارات صحيحة ونضيف عليها :

هل كل مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ هي مجموعة بورلية .

العبارة خاطئة ، توجد مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ ، وذلك

استنادا لمسلمة الاختيار .

للبحث في الانترنت : أثبت وجود مجموعة جزئية في $\mathbb{R}$

وليست بورلية .

قياس لوبيغ : $\lambda(]a,b[) = b - a$

$$\lambda(E) = \inf \left( \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) , \bigcup_{k=1}^{\infty} ]a_k, b_k[ \supseteq E \right)$$

المحاضرة الثالثة : ورقة عمل (1)

السؤال الأول : عرف الصف المطرد :

نقول عن صف $\tau$ من أجزاء مجموعة $\Omega$ غير خالية

إنه صف مطرد إذا حقق ما يلي :

. $\tau \neq \phi$

اتحاد أي متتالية متزايدة من عناصر $\tau$ هو عنصر من $\tau$ .

(وكذا تقاطعها) .

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \ldots ,\quad A_n \in \mathcal{C}$ لكل $n$ $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \in \mathcal{C}$$

تقاطع أيّ متتالية متناقصة من عناصر $\mathcal{C}$ هو عنصر من $\mathcal{C}$ (وكذا اتحادها)

$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots \supseteq B_n \supseteq \ldots ,\quad B_n \in \mathcal{C}$ لكل $n$ $\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{C}$,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B_1 \in \mathcal{C}$$

أعطي مثال عن صف مطرد $\{\emptyset, \Omega\}$

$\mathcal{P}(\Omega)$ هي صف مطرد.

أيّ جبر تام هو صف مطرد.

تمرين: $\mathcal{C}$ جبر + صف مطرد $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ جبر تام

صف المجالات المفتوحة في $\mathbb{R}$ هو ليس صفاً مطرداً.

مثال:

$$\mathcal{C} = \{\, ]a,b[ \,,\ a<b \}$$

ليس صفاً مطرداً.

إذ:

$A_1 = ]-1,1[ \,,\ A_2 = ]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[ \,,\ A_3 = ]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}[ \,, \ldots$

$A_n = ]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$, ...

متتالية متناقصة: $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [0,0] = \{0\} \notin \mathcal{C}$

## تعريف التقارب بالقياس:

فضاء مقيس $(X, m, \mu)$

قياس، جبر، مجموعة غير خالية، تام

$f_n : X \to \mathbb{R}, \quad f: X \to \mathbb{R}$

متتالية

$f_n \xrightarrow{\text{نقطياً}} f, \quad \forall x \in X : f_n(x) \to f(x)$

في كل مكان almostevry where

$f_n \xrightarrow{a.e} f$

$\underset{\text{قياس}}{\mu}(\underbrace{\{x \in X : f_n(x) \not\to f(x)\}}_{\text{المجموعة}}) = 0$

نقول أن المجموعة ... تنتمي إلى m وقيسة

إذا كان التقارب نقطي ⇐ التقارب في كل مكان.

$f_n \xrightarrow{\mu} f, \quad \forall \varepsilon > 0 ; \mu(A_{f_n}(\varepsilon)) \to 0$

$A_n(\varepsilon) = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$

يجب أن تكون المجموعة ∈ الجبر

$\forall \varepsilon > 0 : \lim \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$

لكن يجب أنه يوجد لدينا منها ما أنه توجد متتالية متقاربة — يمكن إزالة lim ونضع →

## الجزء الثاني من السؤال:

$f_n \xrightarrow{\mu} f, \quad g_n \xrightarrow{\mu} g \Rightarrow f_n + g_n \xrightarrow{\mu} f + g$

يجب برهان أنّ: $\mu((f_n + g_n)(x)) \to 0$

حيث: $A_n(\varepsilon) = \{x \in X : |(f_n + g_n)(x) - (f+g)(x)| \geq \varepsilon\}$

لدينا: $A'_n(\varepsilon) = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$

نتبع برهان الأول

$$\underset{f+g}{A}_n(\varepsilon) \subseteq \underset{f}{A}_n(\varepsilon) \cup \underset{g}{A}_n(\varepsilon)$$

عندئذ:

$$0 \leq \underbrace{\mu_{f+g}(A_n(\varepsilon))}_{\Rightarrow 0} \leq \underbrace{\mu_f(A(\varepsilon))}_{\to 0} + \underbrace{\mu_g(A_n(\varepsilon))}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

ملاحظة: إذن $\alpha f_n + \beta g_n \xrightarrow{\mu} \alpha f + \beta g$

السؤال الثاني:

$$(X, \tau) \xrightarrow{f} (Y, \tau')$$

تعريف: $(X, m) \xrightarrow{f} (Y, m')$

$f$ قيوس عندما ~~كل~~ تحقق أن الصورة العكسية لكل قيوسة هي ~~قيوسة~~ قيوسة. هذا الشرط يكافئ واحدة من الشروط الأربعة التالية

$$\forall A' \in m' : f^{-1}(A') : A \in m$$

لو أخذنا $Y = \mathbb{R}$ و $m' = B_{\mathbb{R}}$

$f$ قيوس عندما تتحقق أحد الشروط الأربعة التالية:

1- $\forall \alpha \in \mathbb{R} : f^{-1}(]\alpha, \infty[) \in m$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \{x : f(x) > \alpha\} \in m$

2- $\forall \alpha \in \mathbb{R} : f^{-1}(]-\infty, \alpha]) \in m$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \{x : f(x) \leq \alpha\} \in m$ *

3-

4

برهان أن الحد الأعلى لمتتالية من الدوال القيوسة

$f_n : X \to \mathbb{R}$ : $h(x) = \sup\limits_{n \geq 1} f_n(x)$ هو دالة قيوسة.

سنختار الشرط * :

let $\alpha \in \mathbb{R}$ , $\{x : h(x) \leq \alpha\} = \{x : \sup\limits_{n \geq 1} f_n(x) \leq \alpha\}$

هل هذه المجموعة تنتمي إلى $\mathcal{M}$ ؟ سنعرض كل

حش ، بعضهم

$\cancel{f_n : X \to \mathbb{R}}$

$\cancel{h(x) = \sup\limits_{n \geq 1} f_n(x)}$

$$\{x : f_n(x) \leq \alpha , \forall n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) \leq \alpha\}$$

تعريف: الدالة الدرجية (الدالة البسيطة) هي تلك

التي تكون قيمها منتهية.

تعريف: $f$ دالة قيوسة

$\varphi$ دالة درجية $\varphi : (X, S) \to \mathbb{R}$

$\varphi(X) = \{c_1, \dots, c_n\} \iff$

مجموعة منتهية

تقاطع معدود لقيوسات هو قيوسة

السؤال يأتي هات أربع ~~تعريف~~ تعريفات للدالة

القيوسة. ثم استخدم إحداها لبرهان I.