الموضوع: المحاضرة الخامسة | التاريخ: ٢٠/٣/٢٠٢٨

المحاضرة الخامسة هي نظرية كيلي هاملتون

ملاحظات:

١- للمصفوفات المتشابهة حدودية اصغرية واحدة.

٢- يمكن التعبير عن قوى المصفوفة A الموجبة بدلالة تركيب خطي للمصفوفات $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$

٣- اذا كانت المصفوفة قلوبة فيمكن التعبير عن قلوبة A^{-1} بدلالة تركيب خطي للمصفوفات $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$

٤- للمصفوفة ومنقولها نفس الحدودية المميزة والاصغرية.

٥- الحدودية الأصغرية مؤثر خطي:

ليكن V فضاء شعاعي مولد على حقل F بعده n وليكن $T: V \to V$ مؤثر خطي و G قاعدة مرتبة لـ V عندئذٍ نقول الحدودية الأصغرية لمؤثر خطي نأخذ الحدودية الأصغرية لمصفوفة A بالنسبة للقاعدة G أي:

$$q_T(x) = q_A(x)$$

ملاحظة:

لا تتغير الحدودية الأصغرية لمؤثر خطي بتغير قاعدة الفضاء V.

العلاقة بين الحدودية المميزة والحدودية الأصغرية لمصفوفة (مؤثر خطي)

برهنة ((دون برهان)) كايلي هاملتون

لتكن $A \in M_n(F)$ و $P_A(x)$ حدودية المميزة عندئذٍ A ستكون صفراً لحدودية المميزة

ملاحظة:

1- إن درجة الحدودية الأصغرية أصغر أو تساوي درجة الحدودية المميزة للمصفوفة نفسها.

2- الحدودية الأصغرية تقسم الحدودية المميزة.

$P_A(x) = (x-1)^2(x-3)$

$q_A(x) = (x-1)^{r_1}(x-3)^{r_2}$

$r_1 \in \{0,1,2\}$ $r_2 \in \{0,1\}$

$(x-1)^1(x+3)^1$ $(x-1)^1(x+3)^0$ $(x-1)^0(x+3)^1$ $(x-1)^2(x+3)^0$ $(x-1)^1(x+3)^1$ $(x-1)^0(x+3)^0$ $(x-1)^1(x+3)^0$ $(x-1)^2(x+3)^1$ $(x-1)^2(x+3)^1$

3- الحدودية الأصغرية والحدودية المميزة لهما نفس الأصفار (الجذور) لذلك عند مناقشة شكل الحدودية الأصغرية نركز هنا.

$P_A(x) = (x-1)^3$

$q_A(x) = (x-1)^{r_1}$ $r_1 \in \{1,2,3\}$ نأخذ الصفر

إذا كان $r_1 = 1$ فإن $q_A(x) = (x-1)$

إذا كان $r_1 = 2$ فإن $q_A(x) = (x-1)^2$

إذا كان $r_1 = 3$ فإن $q_A(x) = (x-1)^3$

$P_A(x) = (x-2)(x+1)^2$

$q_A(x) = (x-2)^{r_1}(x+1)^{r_2}$ $r_1 \in \{1\}$ $r_2 \in \{1,2\}$

$(x-2)^1(x+1)^1$ $(x-2)^1(x+1)^2$

$P_A(x) = (x-3)(x+1)(x+2)$

$q_A(x) = (x-3)^{r_1}(x+1)^{r_2}(x+2)^{r_3}$

$r_1, r_2, r_3 \in \{1\}$

$q_A(x) = P_A(x)$

ملاحظة:

إذا كانت الحدودية المميزة لـ A الشكل

$P_A(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$

حيث $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ مختلفة مثنى مثنى

(أي كل واحدة مختلفة عن الأخرى)

(تكتب على شكل عوامل مختلفة من الدرجة الأولى)

$q_A(x) = P_A(x)$ ⟸

$P_A(x) = (x+1)^2(x+2)(x+4)^3$

$q_A(x) = (x+1)^{r_1}(x+2)^{r_2}(x+4)^{r_3}$

$r_1 \in \{1,2\}$ ، $r_2 \in \{1\}$ $r_3 \in \{1,2,3\}$

((انتهت المحاضرة))

إعداد: ناريمان جلّو

محمد أنس القزاز

فريق سر باهلك

Scanned by CamScanner

مثلثية: أوجد المحددة المميزة والمتجهات المميزة لكل من المصفوفات

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_8 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner